

① $QV = S v$ où v est la vitesse moyenne dans la section droite
 $S = ct \Rightarrow v = v_z = ct \Rightarrow a_z = 0 \Rightarrow \sum F_z = 0$.

Dans un plan $\perp z$ $\sum F_x = \sum F_y = 0$ (symétrie autour de z)
 D'où $\sum \vec{F} = \vec{0}$ sur cylindre.

② a) $dS = 2\pi r dz$.

b) $\frac{dv}{dr} < 0$ car $\begin{cases} v=0 & \text{pour } r=R \\ v_{\max} & \text{à } r=0 \end{cases}$

c) $\vec{F}_r = \int_{z_2}^{z_1} d\vec{F}_r = - \int_{z_2}^{z_1} \eta \frac{dv}{dr} 2\pi r dz \vec{e}_z = -\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r \int_{z_2}^{z_1} dz \vec{e}_z$
 $= -\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r (z_1 - z_2) \vec{e}_z$

③ $\vec{F}_e = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -p_1 S \vec{e}_z + p_2 S \vec{e}_z = (p_2 - p_1) \pi r^2 \vec{e}_z$

④ $\sum \vec{F} = \vec{0} = \vec{F}_r + \vec{F}_e + m\vec{g}$ avec $m = \rho S (z_1 - z_2)$
 $\left[-\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r (z_1 - z_2) + (p_2 - p_1) \pi r^2 - \rho \pi r^2 g (z_1 - z_2) \right] \vec{e}_z = \vec{0}$
 $\left[(p_2 + \rho g z_2) - (p_1 + \rho g z_1) \right] \pi r^2 - \eta 2\pi r \frac{dv}{dr} l = 0$.

car $l = z_1 - z_2$.

$(p_2 - p_1) r - 2\eta \frac{dv}{dr} l = 0$.

on pose $\omega = \frac{p_1 - p_2}{l} = \text{perte de charge par unité de longueur}$.

$\omega r - 2\eta \frac{dv}{dr} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dr} = -\frac{\omega}{2\eta} r}$

En intégrant cette équation on trouve

$v = -\frac{\omega}{4\eta} r^2 + K$. Condition initiale : $v=0$ à $r=R$.

$v(R) = -\frac{\omega}{4\eta} R^2 + K = 0 \Rightarrow K = \frac{\omega}{4\eta} R^2$

$v(r) = -\frac{\omega}{4\eta} r^2 + \frac{\omega}{4\eta} R^2 = \frac{\omega}{4\eta} (R^2 - r^2)$

$\boxed{v(r) = \frac{\omega R^2}{4\eta} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)}$

$$v(r) dA = 2\pi r dr \times v(r) \\ = 2\pi r \frac{\omega R^2}{4\eta} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dr.$$

$$4c. Q = \int dQ = \int_0^R 2\pi r \frac{\omega R^2}{4\eta} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dr. \\ = \frac{\pi \omega R^2}{2\eta} \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr = \frac{\pi \omega R^2}{2\eta} \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2}\right] \\ = \frac{\pi \omega R^2}{2\eta} \frac{R^2}{4} = \frac{\pi \omega R^4}{2 \times 4\eta} \rightarrow Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \omega.$$

(cf cours : loi de Poiseuille $\frac{\Delta P}{L} = \frac{8\eta Q_v}{\pi R^4}$)

5. Applications numériques.

$$P_1 - P_2 = (P_1 + \rho g z_1) - (P_2 + \rho g z_2) = (P_1 - P_2) + \rho g (z_1 - z_2) \\ = 0,1 \cdot 10^5 + 9,8 \cdot 10^3 \times 5 \cdot 10^{-2} \\ = 10490 \text{ Pa.}$$

$$\omega = \frac{P_1 - P_2}{L} = \boxed{209800 \text{ Pa/m}}.$$

$$Q = 4,9 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow \eta = \frac{\pi \omega R^4}{8Q} = \boxed{1,05 \cdot 10^{-3} \text{ Pl}}$$

$$Q = S v_{\text{moyen}} \Rightarrow v_{\text{moyen}} = Q \times \frac{4}{\pi D^2} = 0,0623 \text{ m/s.}$$

$$v_{\text{moyen}} < 24 \text{ m/s.}$$

on vérifie que l'écoulement est bien laminaire.

Remarque: Dans la question 4 on a montré qu'en régime laminaire, dans une canalisation cylindrique, la répartition des vitesses dans un même droit est parabolique:

$$v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$