PARTIE THERMODYNAMIQUE et MECANIQUE
(durée conseillée :1 h 20 min)

Un fluide incompressible de masse volumique ρ s'écoule en **régime permanent** (débit constant) et **laminaire** (hypothèse que l'on vérifiera à la fin du problème) à travers un tube de **section constante** droite circulaire de rayon R et de longueur ℓ. Ce fluide est immobile au contact des parois du tube, la vitesse croissant jusqu'à atteindre son maximum sur l'axe du tube. Soit v la vitesse à la distance r de l'axe. A noter que, en régime permanent, v n'est fonction que de r, soit **v(r)**, et elle est dirigée dans le sens de l'écoulement.

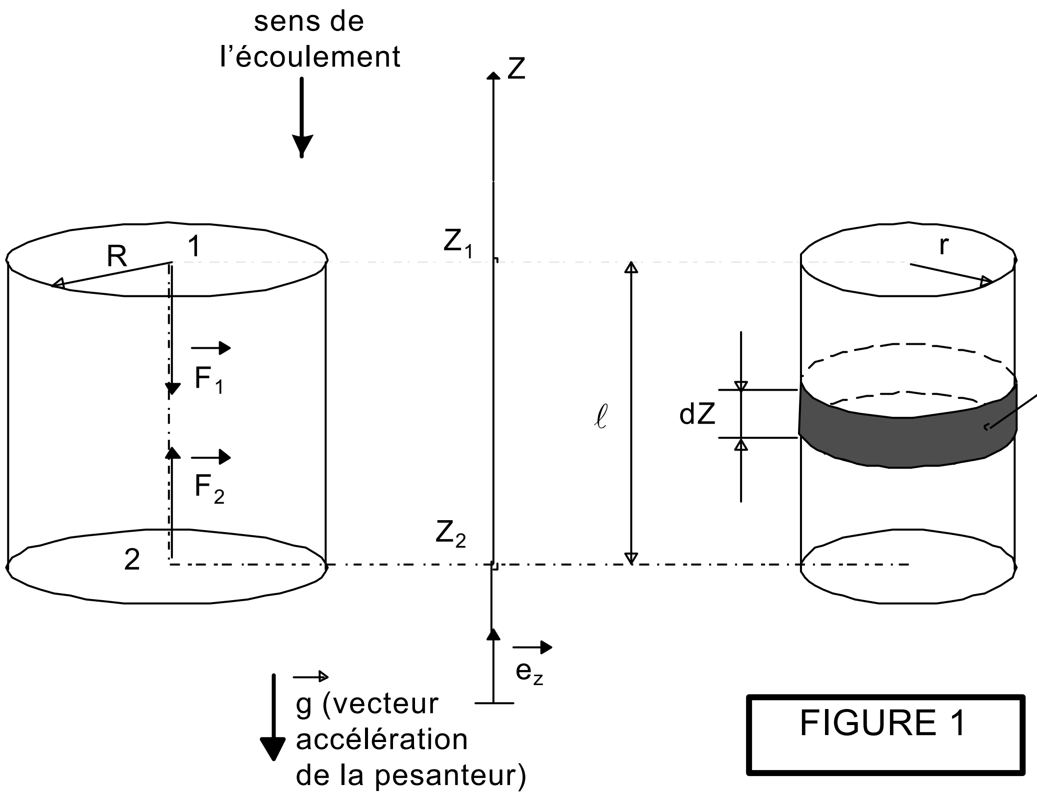


FIGURE 1

$\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ sont les forces pressantes s'exerçant sur les faces perpendiculaires à l'axe aux extrémités du tube de longueur ℓ et résultant des pressions statiques sur les faces 1 et 2, p_1 et p_2.
Un cylindre de fluide de rayon r ($r \leq R$) (fig. 1) éprouve une résistance $\vec{f}_r$ de frottement visqueux dont l'expression sur une surface élémentaire dS est :

$$d\vec{f}_r = -\eta.\left(\frac{dv}{dr}\right).dS.\vec{e}_2 \quad \text{avec } \eta \text{ : coefficient de viscosité.}$$

Questions :

nota : *Les résultats àdémontrer sont parfois donnés dans la question et peuvent être utilisés pour la suite du problème.*

1. Justifier que la somme des forces extérieures agissant sur le cylindre de rayon r est :

$$\left(\Sigma\vec{f}_{ext}\right)_{cylindrederayonr} = \vec{0}$$

2.a) Donner l'expression de dS en fonction de r et de dz (fig.1)

b) Quel est le signe de $\frac{dv}{dr}$? Justifier.

c) Etablir l'expression de $\vec{f}_r$ quand z varie de z_1 à z_2 en considérant $\frac{dv}{dr}$ indépendant de z.

3. Etablir l'expression de la résultante des forces de pression $\vec{f}_e$ dues aux pressions statiques p_1 et p_2 sur le cylindre de fluide de rayon r (fig.1).

4. a) Faire le bilan des forces s'exerçant sur le cylindre de rayon r et de longueur ℓ.

En vous aidant de la question 1, montrer que : $\frac{dv}{dr} = -\left(\frac{\omega}{2.\eta}\right).r$.

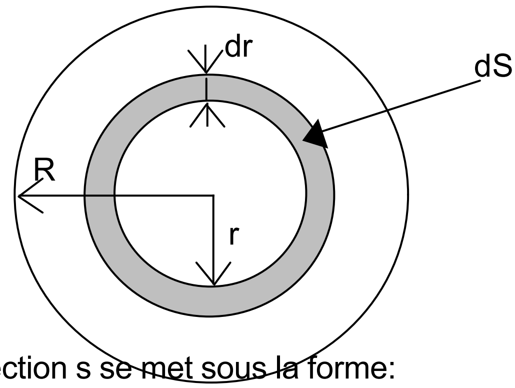
(On pose $\omega = \left(\frac{P_1 - P_2}{\ell}\right) \rangle 0$ avec $P_1=p_1+\rho.g.z_1$ et $P_2=p_2+\rho.g.z_2$.)

Etablir l'expression de v en fonction de r sachant que v(R)=0.

b) Donner l'expression du débit volumique élémentaire dQ à travers l'élément de surface ds = $2.\pi.r.dr$, en fonction de v(r) et ds.

Puis, établir que $dQ = \left(2\pi.R^2 \cdot \frac{\omega}{4.\eta}\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \cdot r \cdot dr$.

section droite du tube



c) En déduire que l'expression de Q pour le tube de section s se met sous la forme:

$$Q = \left(\frac{\pi.R^4}{8.\eta}\right) \cdot \omega .$$

5.Applications numériques :

Le fluide étudié est de l'eau à 20°C.

$\rho = 10^3 kg.m^{-3}$, $g = 9,8 m.s^{-2}$, $\ell = z_1 - z_2 = 5cm$

diamètre du tube : $D = 10^{-4} m$

$p_1 = 1,1.10^5 N.m^{-2}$ (pression statique exercée par une colonne d'eau à l'entrée du tube)

$p_2 = p_{atm} = 10^5 N.m^{-2}$ (pression statique exercée par l'atmosphère)

a) Calculer $\omega = \frac{(P_1 - P_2)}{\ell}$.

b) La mesure expérimentale du débit volumique a donné $Q = 4,9.10^{-10} m^3.s^{-1}$. Calculer η.

c) Sachant que la vitesse critique de l'écoulement du fluide est de 24 ms^{-1}, l'hypothèse de l'écoulement laminaire est-elle justifiée?

<u>rappel</u> : la vitesse critique représente la vitesse maximale pour laquelle l'écoulement reste laminaire.