ELECTROTECHNIQUE 2001

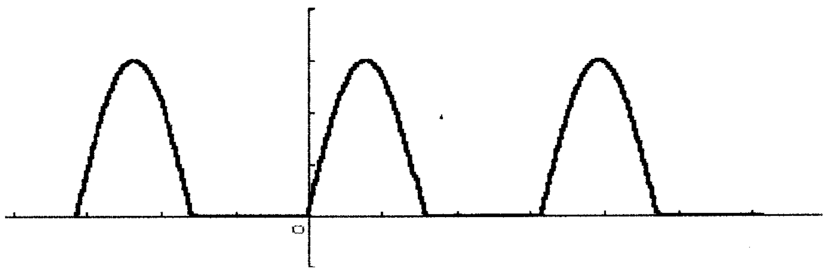
Exercice 1

Partie A

1°. $\int_0^\pi sin(t)cos(t)dt = \frac{1}{2}[sin^2(t)]_0^\pi = 0$

$\int_0^\pi (sin(t)cos(2t)dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi (sin(3t) - sin(t))dt = \frac{1}{2}[-\frac{1}{3}cos(3t) + cost]_0^\pi = \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} - 1) = -\frac{2}{3}$

2° a)



b) $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi sintdt = \frac{1}{2\pi}[-cost]_0^\pi = \frac{1}{\pi}$

En utilisant les résultats de la question 1

$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e(t).costdt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi sint.costdt = 0$

$a_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e(t).cos(2t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi sint.cos(2t)dt = -\frac{2}{3\pi}$

3° a) $E^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi sin^2tdt = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi (1 - cos(2t))dt = \frac{1}{4\pi}[t - \frac{1}{2}sin(2t)]_0^\pi = \frac{1}{4}$

b) $P = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{8} + \frac{2}{9\pi^2} = \frac{86+9\pi^2}{72\pi^2}$

$\frac{P}{E^2} = \frac{17}{18} = 0,984$

Partie B.

1° $Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(u)du = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}sint - \frac{2}{3\pi}cos(2t)$ (2)

dérivons l'expression (2)

$R\frac{di}{dt}(t) + \frac{1}{C}i(t) = \frac{1}{2}cost + \frac{4}{3\pi}sin(2t)$

en divisant par R on obtient

$\frac{di}{dt}(t) + \frac{1}{RC}i(t) = \frac{1}{2R}cost + \frac{4}{3\pi R}sin(2t)$

et en remplaçant R et C par leurs valeurs

$\frac{di}{dt}(t) + 2i(t) = (10^{-4})cost + (\frac{4}{15\pi}10^{-3})sin(2t)$

2° Vérifions que $i_1(t) = (4.10^{-5})cost + (2.10^{-5})sint$ est une solution particulière de l'équation différentielle : $\frac{di}{dt}(t) + 2i(t) = (10^{-4})cost \quad t \in [0\ ;\ +\infty[$

calculons $i_1'(t)$

$i_1'(t) = -(4.10^{-5})sint + (2.10^{-5})cost$

En remplaçant $i'(t)$ et $i(t)$ on obtient : $i'(t) + 2i(t) = -(4.10^{-5})sint + (2.10^{-5})cost + (8.10^{-5})cost + (4.10^{-5})sint = (10.10^{-5})cost = (10^{-4})cost$

$i_1(t)$ est une solution particulière

3° Cherchons une solution particulière de la forme : $i_2(t) = Acos(2t) + Bsin(2t)$

$i_2'(t) = -2Asin(2t) + 2Bcos(2t)$

En remplaçant et en identifiant on a :

$(2A + 2B)cos(2t) + (2B - 2A)sin(2t) = \left(\frac{4}{15\pi}.10^{-3}\right) sin(2t)$

$$\begin{cases} 2A+2B &= 0 \\ -2A+2B &= \frac{4}{15\pi}.10^{-3} \end{cases}$$

En additionnant les deux équations on a $B = \frac{1}{15\pi}.10^{-3}$ et $A = -\frac{1}{15\pi}.10^{-3}$

$i_2(t) = \left(\frac{1}{15\pi}.10^{-3}\right)(sin(2t) - cos(2t))$

4.° L'équation différentielle $\frac{di}{dt}(t) + 2i(t) = 0$ a pour solution générale $i(t) = Ke^{-2t}$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (3)

$y = Ke^{-2t} + i_1(t) + i_2(t)$

$y = Ke^{-2t} + (4.10^{-5})cost + (2.10^{-5})sint + \left(\frac{1}{15\pi}.10^{-3}\right)(sin(2t) - cos(2t))$

Déterminons la solution particulière i telle que $i(0) = 0$

$K + 4.10^{-5} - \frac{1}{15\pi}.10^{-3} = 0$

$K = \frac{5-3\pi}{75\pi}.10^{-3}$

$$i(t) = \frac{5-3\pi}{75\pi}.10^{-3}e^{-2t} + 2.10^{-5}(2cost + sint) + \left(\frac{1}{15\pi}.10^{-3}\right)(sin(2t) - cos(2t))$$

Exercice 2

1° $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A).P(B) = 0,0298$

2° a) Le prélèvement peut être assimilé à un tirage avec remise et la batterie est défectueuse ou ne l'est pas donc la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(100\ ;\ 0,0298)$

$E(X) = np = 100 \times 0,0298 = 2,98$

$V(X) = npq = 100 \times 0,0298 \times (1 - 0,0298) = 2,8912$

b) X peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$ donc $\lambda = 2,98$.

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) = 1 - e^{-2,98}(1 + 2,98 + \frac{2.98^2}{2}) = 1 - 8,42e^{-2,98} = 0,572$

3° a) La variable aléatoire Y suit une loi normale $\mathcal{N}(80\ ;\ 0,4)$

$P(79 \leq Y \leq 81) = P\left(\frac{79-80}{0,4} \leq \frac{Y-80}{0,4} \leq \frac{81-80}{0,4}\right) = P\left(-2,5 \leq \frac{Y-80}{0,4} \leq 2,5\right) = 2\pi(2,5) - 1 = 0,9876$

b) Déterminons a tel que $P(Y \geq a) = 0,95$ donc $P(Y < a) = 0,05$

$P\left(\frac{Y-80}{0,4} \leq \frac{a-80}{0,04}\right) = 0,05$ on sait que $\pi(1,645) = 0,95$ donc $\pi(-1,645) = 0,05$

on a donc $\frac{a-80}{0,4} = -1,645 \quad a = 80 - 0,658 = 79,342$

c) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

l'événement$((Y \geq 80) \cap (Y \geq 79,34)) = (Y \geq 80)$ et $P(Y \geq 80) = 0,5$

donc la probabilité cherchée est égale à : $\frac{P(Y \geq 80)}{P(Y \geq 79,34)} = \frac{0,5}{0,95} = 0,5263$