Exercice 1 (9 points)

Le but de cet exercice est d'établir, avec un minimum de calculs, le développement en série de Fourier de fonctions périodiques rencontrées en électricité.

1) On considère un entier naturel n strictement positif. Montrer que : $\int_0^1 t\cos(n\pi t)\,dt = \dfrac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}$

Pour la suite de l'exercice, on admet que : $\int_0^1 t\sin(n\pi t)\,dt = -\dfrac{\cos(n\pi)}{n\pi}$.

2) On considère la fonction f définie sur **R**, périodique de période 2, telle que : $\begin{cases} f(t) = t & \text{sur } [0\,;1[\\ f(t) = 0 & \text{sur } [1\,;2[\end{cases}$.

a) En utilisant le document réponse n°1, à rendre avec la copie, tracer la courbe C_f représentative de la fonction f sur l'intervalle [- 4; 4].

b) On appelle S_f la série de Fourier associée à la fonction f.

On note $S_f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos(n\pi t) + b_n\sin(n\pi t)\right]$.

Calculer a_0.

Donner les valeurs des coefficients a_n et b_n et en déduire que :

$$S_f(t) = a_0 + \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) - \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(n\pi t)\right]$$

c) Calculer le carré de la valeur efficace de la fonction f, défini par $\mu_{eff}^2 = \dfrac{1}{2}\int_0^2\left[f(t)\right]^2 dt$.

d) Recopier et compléter, avec les valeurs exactes, le tableau suivant :

n	1	2	3
a_n			
b_n			

e) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre réel A défini par : $A = \dfrac{a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3}\left(a_n^2 + b_n^2\right)}{\mu_{eff}^2}$.

3) Soit g la fonction définie sur **R**, périodique de période 2, dont la courbe représentative C_g est tracée sur l'intervalle [- 4 ; 4] dans le document réponse n° 1.

On admet que le développement en série de Fourier S_g associé à la fonction g, est défini par : $S_g(t) = S_f(-t)$.

Justifier que : $S_g(t) = \dfrac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\dfrac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) + \dfrac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(n\pi t)\right]$.

4) Soit h et k les fonctions définies sur R, périodiques de période 2, telles que :

$h(t) = f(t) + g(t)$ et $k(t) = f(t) - g(t)$ pour tout nombre réel **t**.

a) Sur le document réponse n°1, à rendre avec la copie, tracer les courbes C_h et C_k représentatives des fonctions h et k sur l'intervalle [- 4 ; 4].

b) On admet que les développements en série de Fourier S_h et S_k associés respectivement aux fonctions h et k, sont définis par : $S_h(t) = S_f(t) + S_g(t)$ et $S_k(t) = S_f(t) - S_g(t)$.

Déterminer les coefficients de Fourier associés respectivement aux fonctions h et k.

Téléchargé sur http://www.aidexam.com

Exercice 2 (11 points)

Dans cet exercice, on étudie un système « entrée-sortie ».
La partie A permet de déterminer la réponse à l'échelon unité.
Les parties B et C permettent d'étudier les perturbations résultant d'une coupure de 0,1 seconde.

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie par : $\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$.

Une fonction définie sur **R** est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle]-∞ ; 0 [.

Partie A :

On considère la fonction causale s_1 telle que, pour tout nombre réel t : $s_1(t) + \int_0^t s_1(u)du = U(t)$.

On note S_1 la transformée de Laplace de la fonction s_1.

1. Montrer que $S_1(p) = \dfrac{1}{p+1}$.
2. En déduire $s_1(t)$ pour tout nombre réel t.

La courbe représentative de la fonction s_1 est donnée par la figure 1 du document réponse n°2.

Partie B :

On considère la fonction causale s_2 telle que, pour tout nombre réel t : $s_2(t) + \int_0^t s_2(u)du = U(t) - U(t-1)$.

On note S_2 la transformée de Laplace de la fonction s_2.

1. Représenter graphiquement la fonction e_2 définie sur l'ensemble des nombres réels par:
$$e_2(t) = U(t) - U(t-1).$$
2. Déterminer $S_2(p)$.
3. a) En déduire $s_2(t)$ pour tout nombre réel t.
   b) Justifier que : $\begin{cases} s_2(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ s_2(t) = e^{-t} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ s_2(t) = -e^{-t}(e-1) & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$.
4. Etablir le sens de variation de la fonction s_2 sur l'intervalle]1; +∞[.
5. Calculer $s_2(1^+) - s_2(1^-)$
6. On appelle C_2 la courbe représentative de la fonction s_2.
   a) Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

t	1	1,1	1,5	2	2,5
$s_2(t)$					

   Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.
   b) Compléter le tracé la courbe C_2 sur la figure 2 du document réponse n°2 à rendre avec la copie.

Partie C :

On considère la fonction causale s_3 telle que, pour tout nombre réel t : $s_3(t) + \int_0^t s_3(u)du = U(t) - U(t-1) + U(t-1,1)$.

1. Soit la fonction e_3 définie sur l'ensemble des nombres réels par : $e_3(t) = U(t) - U(t-1) + U(t-1,1)$.
   a) Montrer que $e_3(t) = e_2(t)$ pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle] -∞ ; 1,1[.
   b) Déterminer $e_3(t)$ pour $t \geq 1,1$.
   c) Représenter graphiquement la fonction e_3.

Pour la suite, on admet que : $\begin{cases} s_3(t) = s_2(t) & \text{si } t < 1,1 \\ s_3(t) = e^{-t}(1 - e + e^{1,1}) & \text{si } t \geq 1,1 \end{cases}$.

2. Etablir le sens de variation de la fonction s_3 sur l'intervalle]1,1 ; +∞[.
3. Calculer $s_3(1,1^+) - s_3(1,1^-)$.
4. On appelle C_3 la courbe représentative de la fonction s_3.
   a) Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

t	1	1,5	2	2,5
$S_3(t)$				

   Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.
   b) Compléter le tracé de la courbe C_3 sur la figure 3 du document réponse n°2, à rendre avec la copie.

Téléchargé sur http://www.aidexam.com

Eléments pour un corrigé.

Exercice 1 (9 points)

Le but de cet exercice est d'établir, avec un minimum de calculs, le développement en série de Fourier de fonctions périodiques rencontrées en électricité.

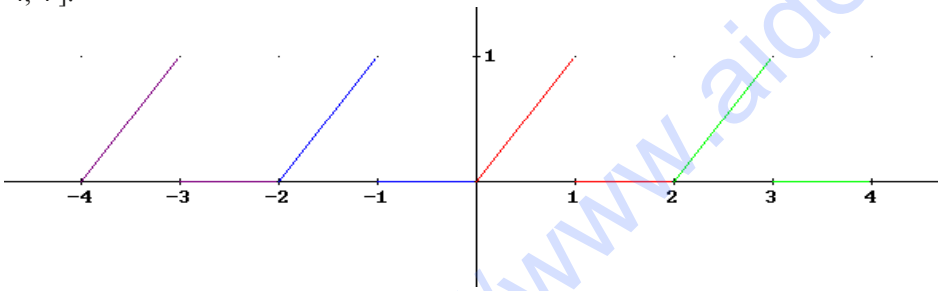
1) On considère un entier naturel n strictement positif. Montrer que : $\int_0^1 t\cos(n\pi t)\,dt = \dfrac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}$.

On a $\int_0^1 t\cos(n\pi t)\,dt \overset{\text{ths.1,2}}{=} \left[t\times\dfrac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \dfrac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\,dt$ donc (ths 2,3) $\int_0^1 t\cos(n\pi t)\,dt = \left[\dfrac{\cos(n\pi t)}{n^2\pi^2}\right]_0^1$ donc (th.3) $\int_0^1 t\cos(n\pi t)\,dt = \dfrac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}$.	Th.1 (IPP) : $\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$ Th.2 : (a constant) sur **R**, (sin (ax))' = a cos (ax) (cos (ax))' = -a sin (ax) Th.3 : pour tout entier n, sin (nπ) = 0 cos (nπ) = $(-1)^n$

Pour la suite de l'exercice, on admet que : $\int_0^1 t\sin(n\pi t)\,dt = -\dfrac{\cos(n\pi)}{n\pi}$.

2) On considère la fonction f définie sur **R**, périodique de période 2, telle que : $\begin{cases} f(t)=t & \text{sur } [0\,;1[\\ f(t)=0 & \text{sur } [1\,;2[\end{cases}$.

a) En utilisant le document réponse n°1, à rendre avec la copie, tracer la courbe C_f représentative de la fonction f sur l'intervalle [- 4; 4].



b) On appelle S_f la série de Fourier associée à la fonction f.

On note $S_f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos(n\pi t) + b_n\sin(n\pi t)\right]$.

Calculer a_0.

On a, par abus d'écriture, $a_0 \overset{\text{th.4}}{=} \dfrac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt \overset{\text{th.5}}{=} \dfrac{1}{2}\int_0^1 t\,dt = \dfrac{1}{4}$.	Th.4 : si f est T-périodique alors les coefficients de Fourier de f sont donnés par $a_0 = \dfrac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)dt$, et pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $a_n = \dfrac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$ et $b_n = \dfrac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt$ où α est une constante et ω est tel que ωT = 2π. Th.5 : relation de Chasles

Donner les valeurs des coefficients a_n et b_n et en déduire que :

$$S_f(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) - \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(n\pi t)\right].$$

On a, par abus d'écriture, pour tout entier n ≥ 1, $a_n \overset{\text{th.4}}{=} \dfrac{2}{2}\int_0^2 f(t)\cos(n\pi t)\,dt \overset{\text{th.5}}{=} \int_0^1 t\cos(n\pi t)\,dt \overset{\text{q.1}}{=} \dfrac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}$ et, de même : $b_n \overset{\text{th.4}}{=} \dfrac{2}{2}\int_0^2 f(t)\sin(n\pi t)\,dt \overset{\text{th.5}}{=} \int_0^1 t\sin(n\pi t)\,dt \overset{\text{énoncé}}{=} -\dfrac{\cos(n\pi)}{n\pi}$. Par suite, par définition de la série de Fourier associée à f, $S_f(t) = \dfrac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\dfrac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) - \dfrac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(n\pi t)\right]$.	

c) Calculer le carré de la valeur efficace de la fonction f, défini par $\mu_{eff}^2 = \dfrac{1}{2}\int_0^2\left[f(t)\right]^2 dt$.

On a, par abus d'écriture, $\mu_{eff}^2 = \dfrac{1}{2}\int_0^2\left[f(t)\right]^2 dt \overset{\text{th.5}}{=} \dfrac{1}{2}\int_0^1 t^2 dt = \dfrac{1}{6}$.	

Téléchargé sur http://www.aidexam.com

Eléments pour un corrigé.

d) Recopier et compléter, avec les valeurs exactes, le tableau suivant :

n	1	2	3
a_n	$\frac{-2}{\pi^2}$	0	$\frac{-2}{9\pi^2}$
b_n	$\frac{1}{\pi}$	$-\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{3\pi}$

e) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre réel A défini par : $A = \dfrac{{a_0}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3}\left({a_n}^2 + {b_n}^2\right)}{{\mu_{eff}}^2}$.

En utilisant 2)b) et 2)d),

$$A = \frac{a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3}\left({a_n}^2 + {b_n}^2\right)}{{\mu_{eff}}^2} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{-2}{\pi^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 + 0 + \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{-2}{9\pi^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3\pi}\right)^2\right)}{\frac{1}{6}} \approx 1{,}451.$$

3) Soit g la fonction définie sur **R**, périodique de période 2, dont la courbe représentative C_g est tracée sur l'intervalle [- 4 ; 4] dans le document réponse n° 1.
On admet que le développement en série de Fourier S_g associé à la fonction g, est défini par : $S_g(t) = S_f(-t)$.
Justifier que : $S_g(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) - \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(n\pi t)\right]$.

On a, pour tout t,

$$S_g(t) = S_f(-t) \overset{q.2)}{=} \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi(-t)) - \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(n\pi(-t))\right]$$

donc (th.6) $S_g(t) = S_f(-t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi) + \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(n\pi t)\right]$.

Th.6 : la fonction cosinus est une fonction paire, et la fonction sinus est une fonction impaire.

4) Soit h et k les fonctions définies sur R, périodiques de période 2, telles que :
$h(t) = f(t) + g(t)$ et $k(t) = f(t) - g(t)$ pour tout nombre réel **t**.

a) Sur le document réponse n°1, à rendre avec la copie, tracer les courbes C_h et C_k représentatives des fonctions h et k sur l'intervalle [- 4 ; 4].

b) On admet que les développements en série de Fourier S_h et S_k associés respectivement aux fonctions h et k, sont définis par : $S_h(t) = S_f(t) + S_g(t)$ et $S_k(t) = S_f(t) - S_g(t)$.
Déterminer les coefficients de Fourier associés respectivement aux fonctions h et k.

Compte tenu de 2) et 3),

$$S_h(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) - \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(n\pi t)\right] + \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi) + \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(n\pi t)\right]$$

donc $S_h(t) = \frac{1}{2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t)$,

$$\text{et } S_k(t) = = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) - \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(n\pi t)\right] - \left(\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi) + \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(n\pi t)\right]\right)$$

donc $S_k(t) = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(n\pi t)$.

Téléchargé sur http://www.aidexam.com

Eléments pour un corrigé.

Exercice 2 (11 points)

Dans cet exercice, on étudie un système « entrée-sortie ».
La partie A permet de déterminer la réponse à l'échelon unité.
Les parties B et C permettent d'étudier les perturbations résultant d'une coupure de 0,1 seconde.

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie par : $\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$.

Une fonction définie sur **R** est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle]-∞ ; 0[.

Partie A :

On considère la fonction causale s_1 telle que, pour tout nombre réel t : $s_1(t) + \int_0^t s_1(u)du = U(t)$.

On note S_1 la transformée de Laplace de la fonction s_1.

1. Montrer que $S_1(p) = \dfrac{1}{p+1}$.

On a :

$$s_1(t) + \int_0^t s_1(u)du = U(t)$$
$$\downarrow \text{ ths 1, 2, 3, 4}$$
$$S_1(p) + \frac{S_1(p)}{p} = \frac{1}{p}$$
$$\downarrow$$
$$S_1(p)\left(\frac{p+1}{p}\right) = \frac{1}{p}$$
$$\downarrow$$
$$S_1(p) = \frac{1}{p+1}.$$

Th.1 : $f(t)U(t) = g(t)U(t) \xrightarrow{£} F(p) = G(p)$
Th.2 : £ est linéaire
Th.3 : $\int_0^t f(u)U(u)du \xrightarrow{£} \dfrac{F(p)}{p}$
Th.4 : $U(t) \xrightarrow{£} \dfrac{1}{p}$

2. En déduire $s_1(t)$ pour tout nombre réel t.

On a :

$$S_1(p) = \frac{1}{p+1}$$
$$\downarrow \text{ th 5}$$
$$s_1(t) = e^{-t}U(t).$$

Th.5 : $\dfrac{1}{p+a} \xrightarrow{£^{-1}} e^{-at}U(t)$

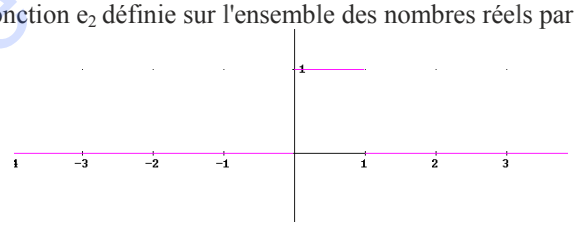
La courbe représentative de la fonction s_1 est donnée par la figure 1 du document réponse n°2.

Partie B :

On considère la fonction causale s_2 telle que, pour tout nombre réel t : $s_2(t) + \int_0^t s_2(u)du = U(t) - U(t-1)$.

On note S_2 la transformée de Laplace de la fonction s_2.

1. Représenter graphiquement la fonction e_2 définie sur l'ensemble des nombres réels par : $e_2(t) = U(t) - U(t-1)$.



2. Déterminer $S_2(p)$.

On a :

$$s_2(t) + \int_0^t s_2(u)du = U(t) - U(t-1)$$
$$\downarrow \text{ ths 1, 2, 3, 4, 6}$$
$$S_2(p) + \frac{S_2(p)}{p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-p}$$
$$\downarrow$$
$$S_2(p)\left(\frac{p+1}{p}\right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-p}$$
$$\downarrow$$
$$S_2(p) = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+1}e^{-p}.$$

Th.6 : $f(t-\tau)\,U(t-\tau) \xrightarrow{£} F(p)e^{-\tau p}$

Téléchargé sur http://www.aidexam.com

Eléments pour un corrigé.

3. a) En déduire $s_2(t)$ pour tout nombre réel t.

On a : $S_2(p) = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+1}e^{-p}$ ↓ ths 7, 5, 8 $s_2(t) = e^{-t}U(t) - e^{-(t-1)}U(t-1)$.	Th.7 : $\mathcal{L}^{-1}$ est linéaire Th.8 : $F(p)e^{-\tau p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t-\tau)\,U(t-\tau)$

b) Justifier que : $\begin{cases} s_2(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ s_2(t) = e^{-t} & \text{si } 0 \le t < 1 \\ s_2(t) = -e^{-t}(e-1) & \text{si } t \ge 1 \end{cases}$.

De $S_2(p) = e^{-t}U(t) - e^{-(t-1)}U(t-1)$, et de la définition de U(t), on déduit : si $t < 0$, alors $s_2(t) = 0$ si $0 \le t < 1$, alors $s_2(t) = e^{-t} - 0 = e^{-t}$, si $1 \le t$, alors $s_2(t) = e^{-t} - e^{-(t-1)} = -e^{-t}(e-1)$.	

4. Etablir le sens de variation de la fonction s_2 sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

La fonction $t \to e^{-t}$ est décroissante sur $]1; +\infty[$ et $-(e-1)$ est négatif, donc s_2 est croissante sur $]1; +\infty[$.	

5. Calculer $s_2(1^+) - s_2(1^-)$

On a : $s_2(1^+) - s_2(1^-) = e^{-1} - (-e^{-1}(e-1)) = 1$.	

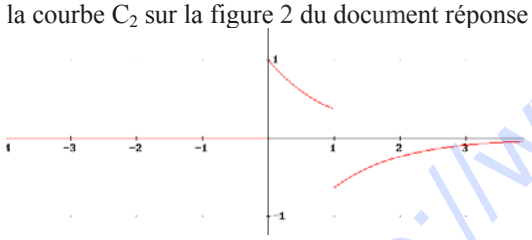
6. On appelle C_2 la courbe représentative de la fonction s_2.

a) Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

t	1	1,1	1,5	2	2,5
$s_2(t)$	-0,63	-0,57	-0,38	-0,23	-0,14

Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.

b) Compléter le tracé la courbe C_2 sur la figure 2 du document réponse n°2 à rendre avec la copie.



Partie C :

On considère la fonction causale s_3 telle que, pour tout nombre réel t : $s_3(t) + \int_0^t s_3(u)du = U(t) - U(t-1) + U(t-1,1)$.

1. Soit la fonction e_3 définie sur l'ensemble des nombres réels par : $e_3(t) = U(t) - U(t-1) + U(t-1,1)$.

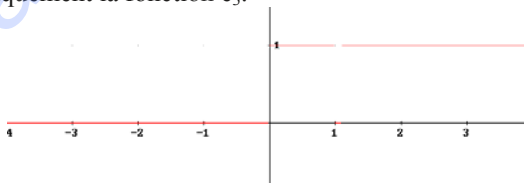
a) Montrer que $e_3(t) = e_2(t)$ pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $]-\infty ; 1,1[$.

Pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $]-\infty ; 1,1[$, de la définition de U(t), on déduit : si $t < 0$, alors $e_2(t) = 0$ et $e_3(t) = 0 - 0 + 0 = 0$ si $0 \le t < 1$, alors $e_2(t) = 1 - 0 = 1$ et $e_3(t) = 1 - 0 + 0 = 1$ si $1 \le t < 1,1$, alors $e_2(t) = 1 - 1 = 0$ et $e_3(t) = 1 - 1 + 0 = 0$, donc sur $]-\infty ; 1,1[$ $e_3(t) = e_2(t)$.	

b) Déterminer $e_3(t)$ pour $t \ge 1,1$.

Pour tout nombre réel $t \ge 1,1$, de la définition de U(t), on déduit : $e_3(t) = 1 - 1 + 1 = 1$	

c) Représenter graphiquement la fonction e_3.



Pour la suite, on admet que : $\begin{cases} s_3(t) = s_2(t) & \text{si } t < 1,1 \\ s_3(t) = e^{-t}(1 - e + e^{1,1}) & \text{si } t \ge 1,1 \end{cases}$.

2. Etablir le sens de variation de la fonction s_3 sur l'intervalle $]1,1 ; +\infty[$.

La fonction $t \to e^{-t}$ est décroissante sur $]1,1 ; +\infty[$ et $(1 - e + e^{1,1})$ est positif, donc s_3 est décroissante sur $]1,1 ; +\infty[$.	

3. Calculer $s_3(1,1^+) - s_3(1,1^-)$.

On a : $s_3(1,1^+) - s_3(1,1^-) = -e^{-1,1}(e-1) - (e^{-1,1}(1 - e + e^{1,1})) = -1$.	

4. On appelle C_3 la courbe représentative de la fonction s_3.

a) Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

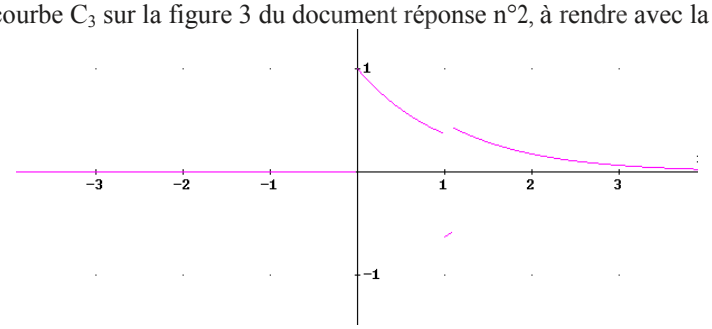
t	1	1,5	2	2,5
$s_3(t)$	-0,63	0,28	0,17	0,10

Téléchargé en http://www.aidexam.com

Eléments pour un corrigé.

Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.

b) Compléter le tracé de la courbe C_3 sur la figure 3 du document réponse n°2, à rendre avec la copie.



Téléchargé sur http://www.aidexam.com