BTS Groupement A

Mathématiques

Session 2012

Exercice 1 : *10 points*

Spécialités Informatique et réseaux pour l'industrie et les services techniques – Systèmes Électroniques - Électrotechnique – Génie optique

Une machine fabrique un très grand nombre de pièces d'un même modèle.
Les résultats approchés seront donnés à 10^{-2} près.

Partie A :

Une pièce fabriquée est conforme si son épaisseur est comprise en $14,3$ et $15,5$ mm.
On considère la variable aléatoire X qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée, associe son épaisseur en millimètres. La variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne m et d'écart type σ. La moyenne m dépend du réglage de la machine.

1. Dans cette question, on suppose que $\sigma = 0,35$. De plus, la machine a été réglée de sorte que $m = 15$.
   (a) Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée soit conforme.
   (b) Calculer le nombre réel positif h tel que $p(15 - h \leqslant X \leqslant 15 + h) = 0,95$.
   (c) Interpréter le résultat de la question 1bà l'aide d'une phrase.
2. La machine est désormais réglée de sorte que $m = 14,9$.
   Quel devrait être alors l'écart type pour que le pourcentage de pièces conformes soit égal à 90% ?

Partie B :

On admet que la proportion de pièces conformes dans la production d'une journée est de 90%. On prélève au hasard un lot de 50 pièces dans la production pour vérification de l'épaisseur. La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On désigne par Y la variable aléatoire prenant le nombre de pièces non conformes dans ce lot.

1. La variable aléatoire Y suit une loi binomiale.
   Préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement deux pièces non conformes dans ce lot.
3. On admet que la loi de probabilité de Y peut être approchée par une loi de Poisson.
   (a) Justifier que le paramètre λ de cette loi de Poisson est égal à 5.
   (b) En utilisant cette loi de Poisson, calculer la probabilité que le lot contienne au plus deux pièces non conformes.

Partie C :

Pour améliorer sa production, l'usine achète une deuxième machine.
On sait que 40% des pièces sont fabriquées par la première machine M_1, les autres pièces étant fabriquées par la nouvelle machine M_2.
Par ailleurs, 90% des pièces fabriquées par la machine M_1 sont conformes. De plus, une étude faite sur la production journalière globale de l'usine a montré que 6% des pièces produites sont non conformes.
On prélève au hasard une pièce dans la production journalière globale de l'usine.
On définit les événements suivants :

- A : « La pièce prélevée provient de la machine M_1. »
- $\bar{A}$: « La pièce prélevée provient de la machine M_2. »
- C : « La pièce est conforme. »

1. Montrer que la probabilité que la pièce prélevée provienne de la machine M_1 et soit non conforme est $0,04$.
2. Recopier et compléter avec des probabilités, le tableau suivant :

	C	$\bar{C}$	
A			
$\bar{A}$			
		$0,06$	

3. Calculer la probabilité que la pièce prélevée provienne de la machine M_1 sachant que cette pièce est conforme.
4. Les événements A et C sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

Exercice 1 :

Spécialité Contrôle industriel et régulation automatique

On notera $\mathscr{U}$ la fonction échelon unité définie sur l'ensemble des nombres réels telle que :

$$\begin{cases} \mathscr{U}(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathscr{U}(t) = 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

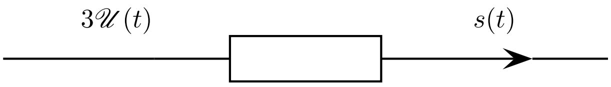
Une fonction définie sur l'ensemble des nombres réels est dite causale lorsque cette fonction est nulle sur l'intervalle $]-\infty\,; 0[$.
On note e l'échelon causal discret, défini sur l'ensemble des nombres entiers relatifs par :

$$\begin{cases} e(n) = 0 & \text{si } n < 0 \\ e(n) = 1 & \text{si } n \geqslant 0 \end{cases}$$

On considère un système entrée-sortie du premier ordre. Le signal de sortie est modélisée par une fonction causale s telle que $s(0) = 0$ et vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$2s'(t) + s(t) = 3\mathscr{U}(t)$$

Le signal d'entrée prend, à tout instant t, la valeur $3\mathscr{U}(t)$.



Partie A :

1. Résoudre l'équation différentielle
$$2y'(t) + y(t) = 0$$
2. On considère l'équation différentielle (E) :
$$2y'(t) + y(t) = 3$$
Déterminer la fonction constante h solution de cette équation différentielle.
3. En déduire que, pour tout nombre réel t positif ou nul, on a :
$$s(t) = 3 - 3\mathrm{e}^{-0,5t}$$
4. (a) Étudier le sens de variation de la fonction s sur l'intervalle $[0\,; +\infty[$.
   (b) Déterminer la valeur du nombre réel ℓ, limite de $s(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
5. L'annexe 1 jointe au sujet comporte quatre courbes représentatives de fonction causales.
Parmi ces quatre courbes, laquelle représente la fonction s ? Justifier ce choix.
6. On appelle temps de réponse du système la valeur du nombre réel t à partir de laquelle $s(t)$ atteint 95% de la valeur de la limite ℓ calculée à la question 4
Déterminer une valeur approchée du temps de réponse du système.
Plusieurs méthodes sont possibles, préciser la démarche choisie.

Partie B :
On s'intéresse maintenant à un système d'entrée-sortie numérique destiné à approcher le système analogique étudié dans la partie A. Une discrétisation de l'équation différentielle (E) avec un pas de discrétisation T_e permet d'obtenir, pour tout entier naturel n, la relation (E') suivante :

$$2\frac{x(n+1) - x(n)}{T_e} + x(n+1) = 3$$

Pour tout nombre entier n, le nombre réel $x(n)$ fournit une approximation de $x(nT_e)$.
En particulier, on a :
$$x(0) = s(0) = 0$$

Pour toute la suite de l'exercice, on prend $T_e = 0,1$ seconde.

1. Montrer que la relation (E') peut s'écrire, pour tout nombre entier positif ou nul, sous la forme :

$$x(n+1) = \frac{20}{21}x(n) + \frac{1}{7}$$

2. On a rempli le tableau de valeurs ci-dessous.

n	0	1	2	3
$x(n)$	0	$0,143$	$0,279$	$0,408$

Calculer des valeurs approchées à 10^{-3} près des nombres réels $x(4)$ et $x(5)$.

3. On note $X(z)$ la transformée en $\mathcal{Z}$ de la suite $x(n)$.
Déduire de la question 1 que :

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{7(z-1)\left(z-\frac{20}{21}\right)}$$

4. Déterminer les réels A et B tels que :

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A}{z-1} - \frac{B}{z-\frac{20}{21}}$$

5. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

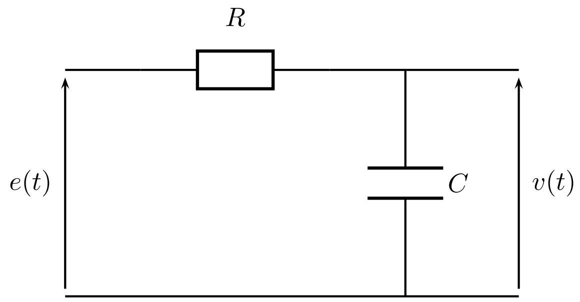
$$x(n) = 3\left(1-\left(\frac{20}{21}\right)^n\right)$$

6. (a) Préciser la limite de $x(n)$ quand n tend vers $+\infty$.
   (b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $1-\left(\frac{20}{21}\right)^n \geqslant 0,95$.
   (c) En déduire, à 10^{-1} près, le temps de réponse en secondes du système numérique. (La notion de temps de réponse a été définie à la question 6 de la partie A.)

Exercice 2 : *10 points*

Spécialités Informatique et réseaux pour l'industrie et les services techniques – Systèmes Électroniques - Électrotechnique – Génie optique – Contrôle industriel et régulation automatique

Un circuit électrique comporte, en série, une résistance R et un condensateur de capacité C.



Le circuit est alimenté par une tension « source » représentée par une fonction e. La tension aux bornes du condensateur est représentée par une fonction v. Si on considère cette tension comme signal de « sortie », le circuit joue le rôle de filtre passe-bas.

On notera $\mathscr{U}$ la fonction échelon unité définie sur l'ensemble des nombres réels telle que :

$$\begin{cases} \mathscr{U}(t) &= 0 \quad \text{si } t < 0 \\ \mathscr{U}(t) &= 1 \quad \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Partie A :

Les fonctions e et v vérifient l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ suivante :

$$RC\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + v(t) = e(t)$$

De plus, on suppose que $v(t) = 0$ pour tout nombre réel t négatif ou nul. En particulier, on a $v(0) = 0$.

On admet que les fonctions e et v possèdent des transformées de Laplace, notées respectivement E et V.

1. La tension e appliquée en entrée du circuit est telle que, pour tout nombre réel t :

$$e(t) = 10\mathscr{U}(t)$$

   (a) Tracer sur la copie une représentation graphique de la fonction e.

   (b) Exprimer $E(p)$.

2. En appliquant la transformation de Laplace à l'équation différentielle $(\mathscr{E})$, montrer que :

$$V(p) = \frac{10}{p(RCp+1)}$$

3. (a) Vérifier que

$$V(p) = \frac{10}{p} - \frac{10}{p + \frac{1}{RC}}$$

   (b) En déduire l'expression de $v(t)$ pour tout nombre réel t positif ou nul en fonction de t, R et C.

Partie B :

Dans toute la suite j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

La transmittance isochrone T du circuit est définie, pour toute pulsation ω, par :

$$T(\omega) = \frac{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}}{R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}}$$

1. On pose $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$.

   Montrer que :

$$T(\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

2. Calculer $T(\omega_0)$. Déterminer alors le module et un argument du nombre complexe $T(\omega_0)$.
3. Cette question est posée sous la forme d'un QCM. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, on écrira sur la copie la formule choisie. L'absence de réponse ou une mauvaise réponse n'est pas pénalisante.

   (a) Parmi les quatre expressions ci-dessous, laquelle donne le module du nombre complexe $T(\omega)$?

   $$\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \qquad 1+\frac{\omega}{\omega_0} \qquad \frac{-1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

   (b) Parmi les quatre expressions ci-dessous, laquelle donne un argument du nombre complexe $T(\omega)$?

   $$-\arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) \qquad \frac{\omega}{\omega_0} \qquad -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \qquad \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

4. Vérifier la concordance entre les résultats trouvés aux questions 2 et 3a puis 2 et 3b.
5. Pour une pulsation ω de la tension d'entrée e, le gain $G_{\text{db}}(\omega)$ du circuit, exprimé en décibels, est donné par la formule
   $$G_{\text{db}}(\omega) = \frac{20}{\ln 10}\ln\left(|T(\omega)|\right)$$
   Calculer, à une unité près, le gain correspondant à la pulsation ω_0.
6. **Pour toute la suite de l'exercice, on se place dans le cas où $\boldsymbol{\omega_0 = 500}$.**
   Pour tout nombre réel ω appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on pose
   $$\phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{500}\right)$$
   et on note $M(\omega)$ le point de coordonnées $(\phi(\omega); G_{\text{db}}(\omega))$.
   Le point $M(\omega)$ décrit la courbe tracée sur la figure 1 du document réponse lorsque ω varie.

   (a) Calculer $\phi(\omega_0)$.

   (b) Placer alors le point $M_0 = M(500)$.

   (c) En déduire graphiquement l'ordonnée du point M_0.
7. On admet que la fonction ϕ est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   La valeur de ω correspondant au point M_1 du document réponse est-elle :
   – strictement inférieure à 500 ?
   – égale à 500 ?
   – strictement supérieure à 500 ?
   On justifiera la réponse.

Document réponse

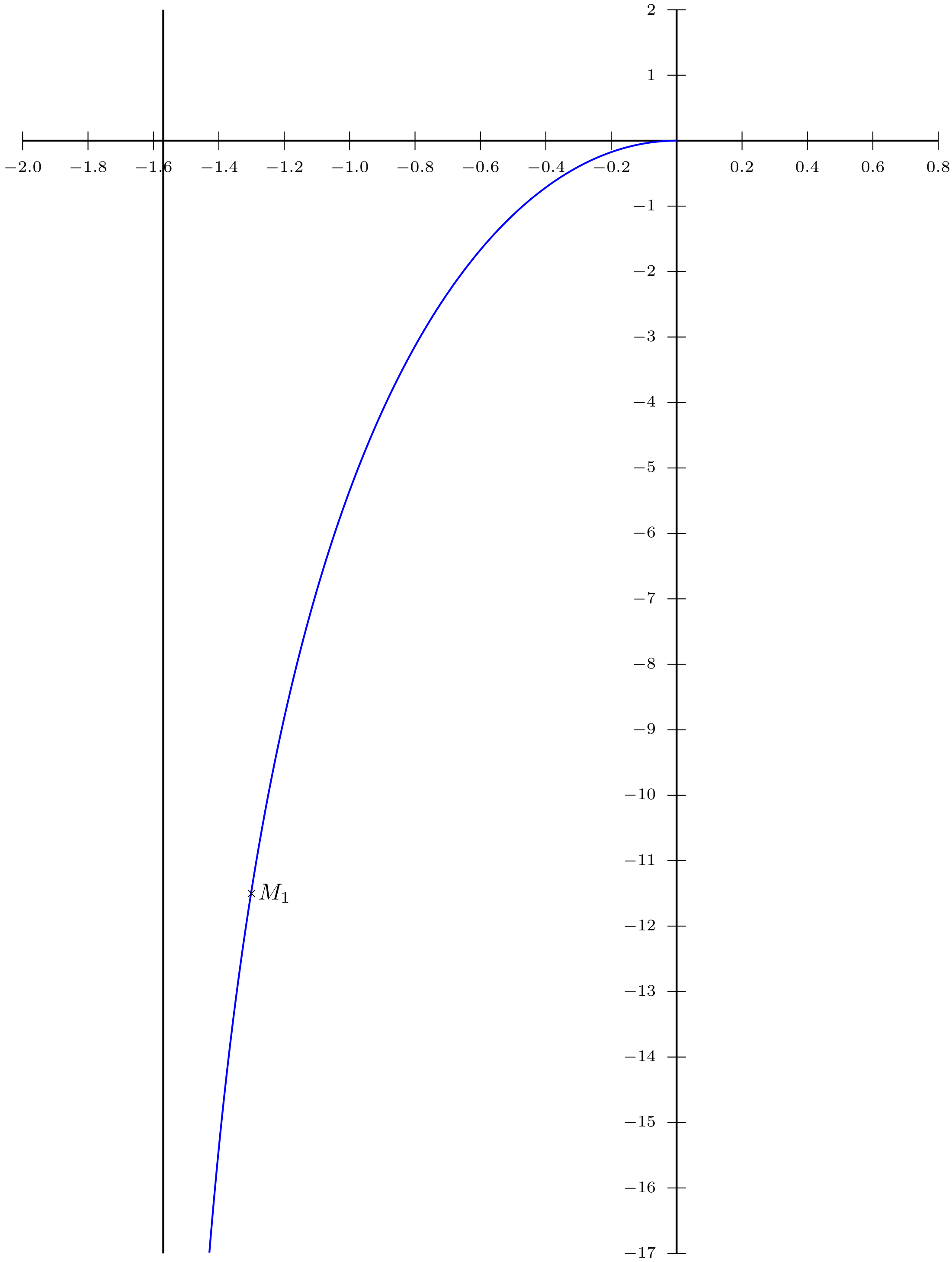


FIGURE 1 – Courbe décrite par le point $M(\omega)$

Annexe 1 – Spécialité CIRA

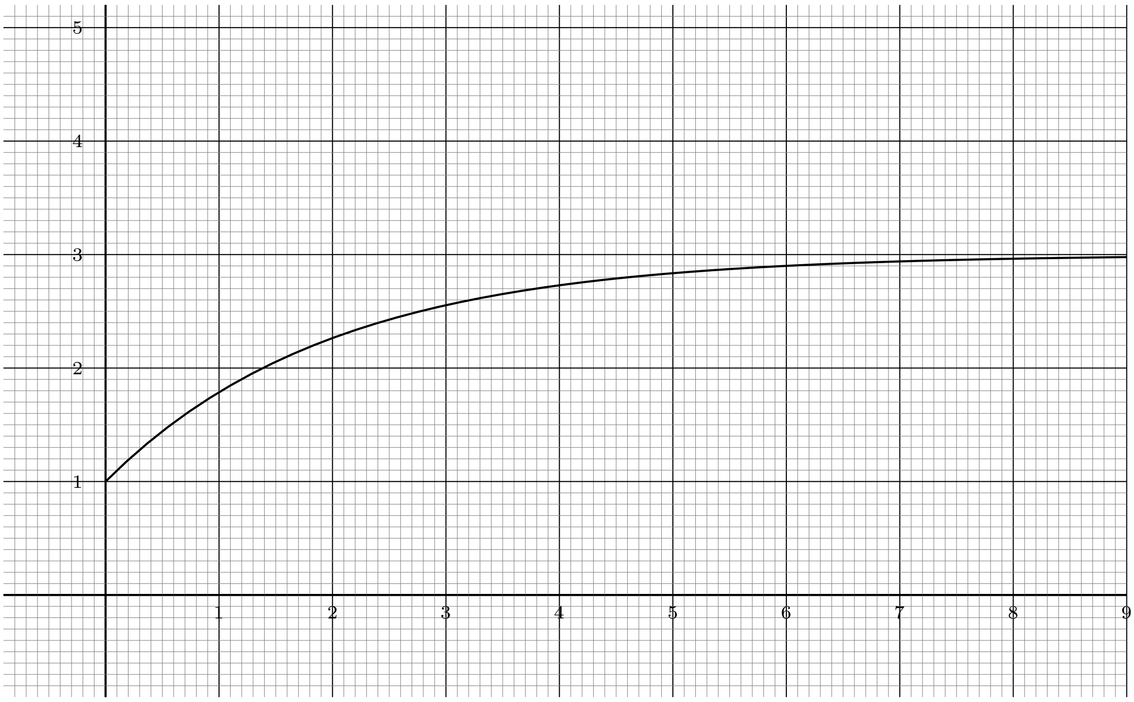


FIGURE 2 – Courbe 1

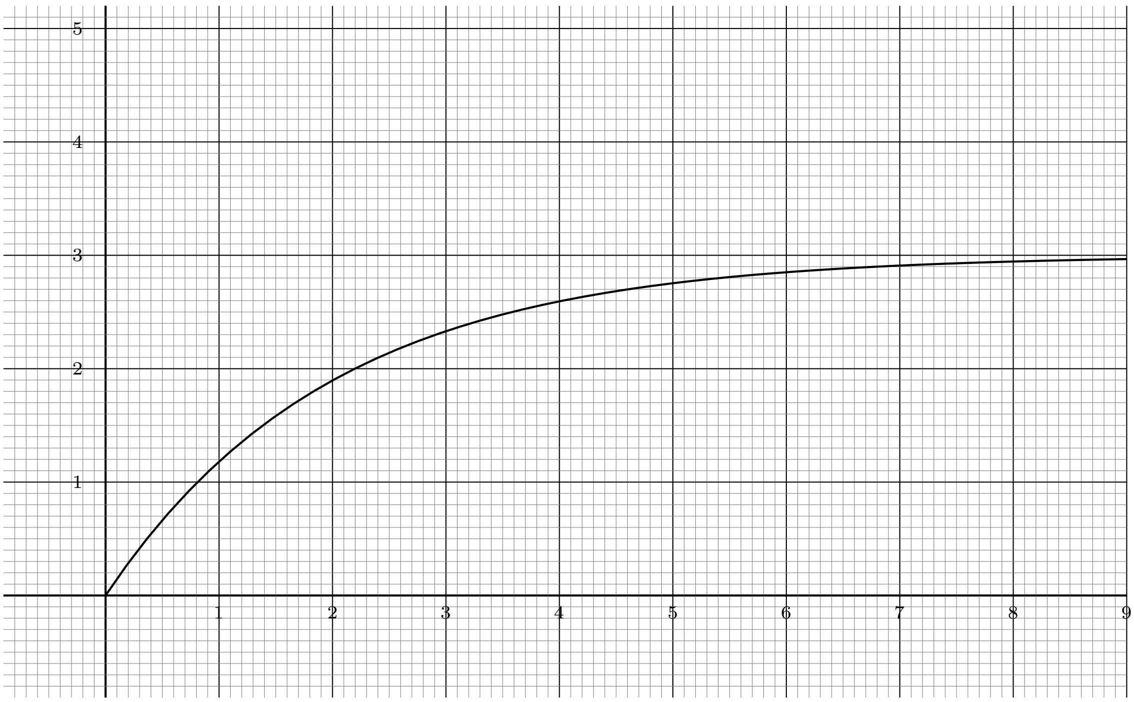


FIGURE 3 – Courbe 2

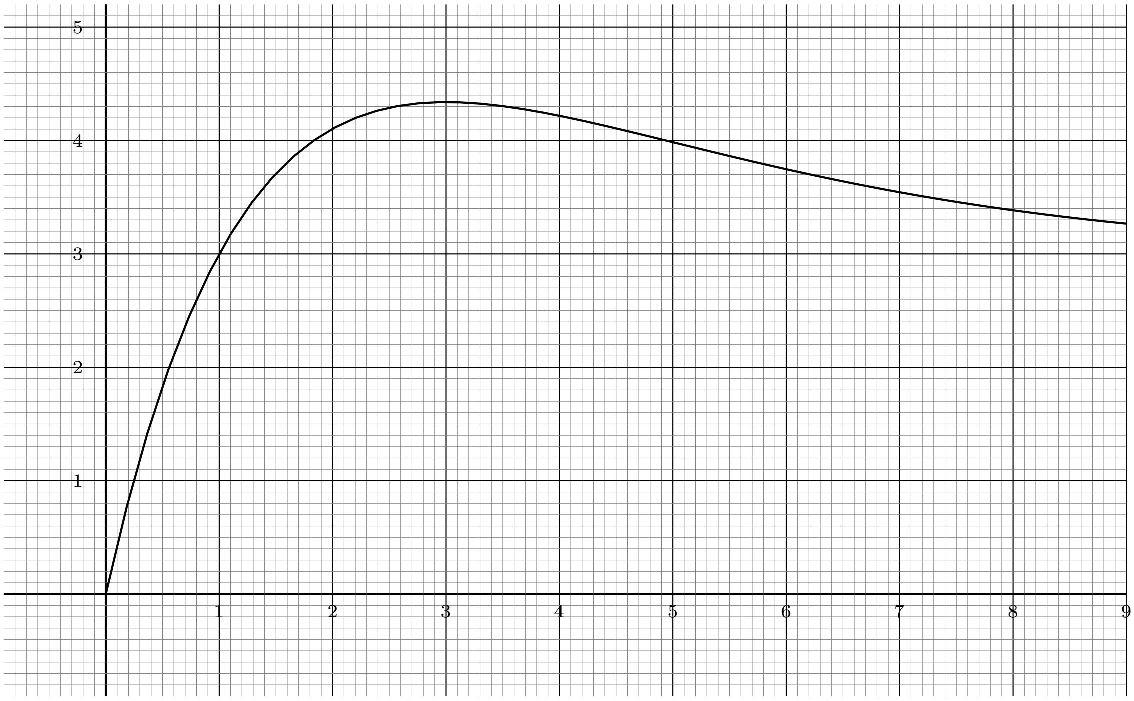


FIGURE 4 – Courbe 3

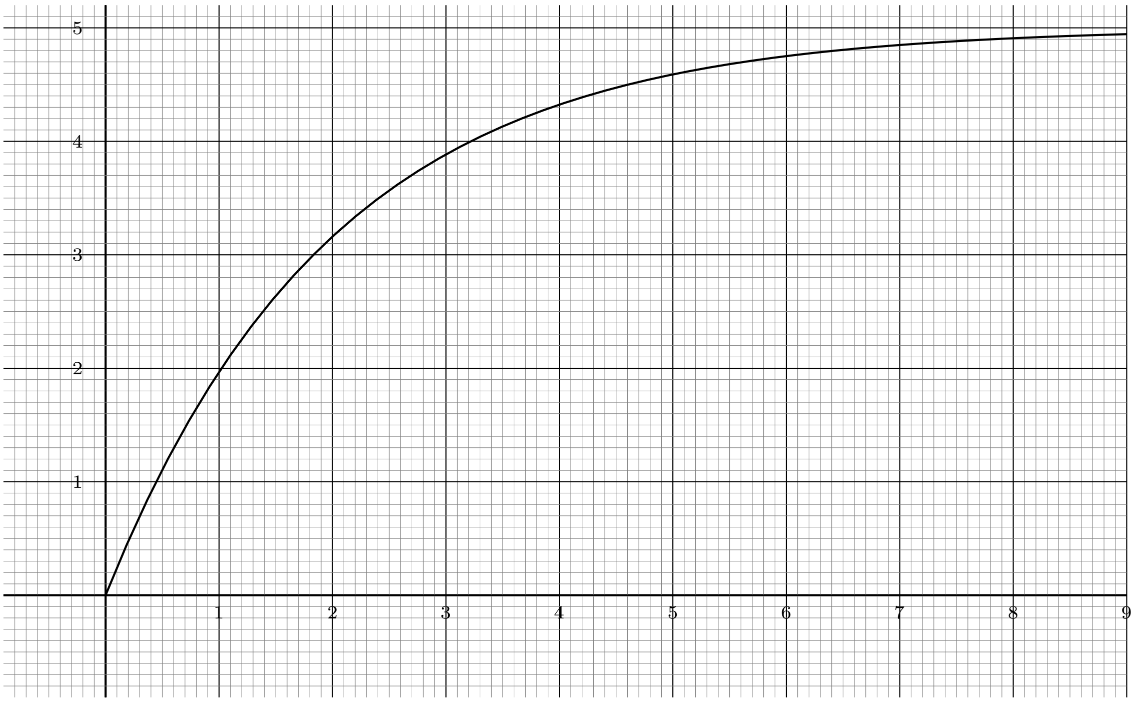


FIGURE 5 – Courbe 4

Suggestions ou remarques : xavier.tisserand@ac-poitiers.fr