

Mathématiques - brevet de technicien supérieur
session 2007 - groupement B
Éléments de correction

Exercice 1 (12 points)

A. Résolution d'une équation différentielle

1. La fonction G définie sur $[0 ; +\infty[$ par $G(t) = 710t$ est une primitive de la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = 710$.

On en déduit la solution générale de l'équation homogène (E_0) , $y(t) = ke^{-710t}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

2. La fonction h est dérivable sur $[0 ; +\infty[$, et $h'(t) = 0$.

D'où il vient immédiatement : $h'(t) + 710h(t) = 710$: h est une solution particulière de (E) .

3. La solution générale de (E) s'obtient en ajoutant une solution particulière h à la solution générale de l'équation homogène (E_0) .

La solution générale de (E) peut s'écrire :

$$y(t) = ke^{-710t} + 1 \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

4. La fonction φ est solution de (E) alors $\varphi(t) = ke^{-710t} + 1$.

On veut de plus $\varphi(0) = 0$ alors $k = -1$, d'où :

$$\varphi(t) = 1 - e^{-710t}$$

B. Étude d'une fonction

1. φ est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et $\varphi'(t) = 710e^{-710t}$.

Or, pour tout réel $t \geq 0$, $e^{-710t} > 0$, alors $\varphi'(t) > 0$: la fonction φ est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2. (a) Le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction exponentielle est :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

En posant $x = -710t$, on obtient :

$$e^{-710t} = 1 - 710t + \frac{(-710t)^2}{2} + t^2\varepsilon(t) \quad \text{avec } \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0.$$

D'où le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction φ est :

$$\varphi(t) = 710t - \frac{(710t)^2}{2} + t^2\varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0.$$

- (b) Une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 est donnée par la partie affine du développement limité de φ au voisinage de 0. Alors, ici, T a pour équation :

$$y = 710t.$$

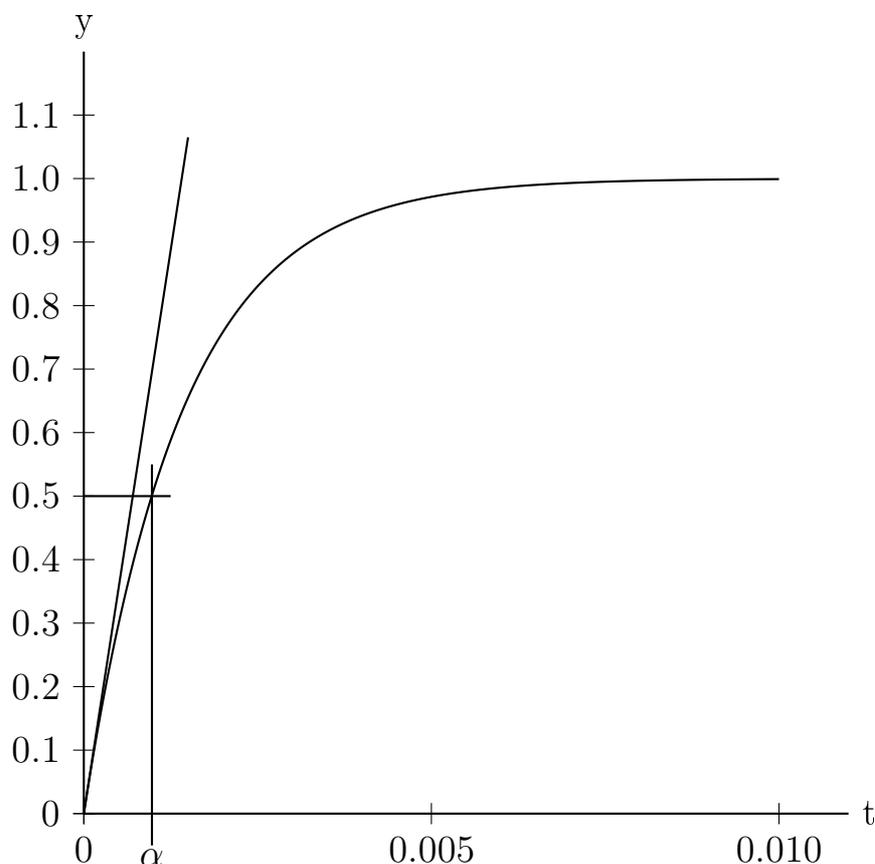
Pour la position relative de (C) et (T) au voisinage de 0, il faut étudier le signe de

$$\varphi(t) - (710t) = -\frac{(710t)^2}{2} + t^2\varepsilon(t),$$

expression qui est du signe de $-\frac{(710t)^2}{2}$ au voisinage de 0, c'est-à-dire toujours négatif.

Au voisinage de 0, la courbe C est toujours au dessous de la tangente T .

3. Courbe et tangente.



4. (a) On veut $\varphi(\alpha) = 0,5$, alors $e^{-710\alpha} = 0,5$ équivaut à $\alpha = -\frac{\ln 0,5}{710}$.

Or $\ln 0,5 = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$, alors

$$\alpha = \frac{\ln 2}{710} \simeq 98 \times 10^{-5}$$

(b) Sur la figure, il faut tracer la droite d'équation $y = 0,5$, et α est l'abscisse du point d'intersection de cette droite et de la courbe C .

C. Calcul intégral

1. On a

$$\begin{aligned} I(t) &= 710 \int_0^t x e^{-710x} dx \\ &= \int_0^t 710x e^{-710x} dx \end{aligned}$$

On intègre par parties en posant :

$$\begin{aligned} u(x) &= x & \text{alors} & \quad u'(x) = 1 \\ v'(x) &= 710e^{-710x} & \text{alors} & \quad v(x) = -e^{-710x} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} I &= [-x e^{-710x}]_0^t - \int_0^t -e^{-710x} dx \\ &= -t e^{-710t} + \left[\frac{e^{-710x}}{-710} \right]_0^t \\ &= -t e^{-710t} - \frac{1}{710} e^{-710t} + \frac{1}{710}. \end{aligned}$$

2. $t e^{-710t} = \frac{1}{710} \times \frac{710t}{e^{710t}}$.

En posant $u = 710t$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} 710t = +\infty$ et à l'aide de $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$, il vient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-710t} = 0$$

De plus, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-710t} = 0$, alors on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \frac{1}{710} \simeq 141 \times 10^{-5}.$$

Exercice 2 (8 points)

A. Loi normale

X suit la loi normale de moyenne 30 et d'écart-type 0,09, alors la variable aléatoire $T = \frac{X - 30}{0,09}$ suit la loi normale centrée réduite.

Une pièce est conforme si $X \in [29,8 ; 30,2]$.

$$\begin{aligned} P(29,8 \leq X \leq 30,2) &= P\left(\frac{29,8 - 30}{0,09} \leq T \leq \frac{30,2 - 30}{0,09}\right) \\ &= P\left(-\frac{0,2}{0,09} \leq T \leq \frac{0,2}{0,09}\right) \\ &= P\left(-\frac{20}{9} \leq T \leq \frac{20}{9}\right) \\ &= \Pi\left(\frac{20}{9}\right) - \Pi\left(-\frac{20}{9}\right) \\ &= \Pi\left(\frac{20}{9}\right) - \left[1 - \Pi\left(\frac{20}{9}\right)\right] \\ &= 2\Pi\left(\frac{20}{9}\right) - 1 \\ &\approx 2\Pi(2,22) - 1 \\ &\approx 0,9736. \end{aligned}$$

B. Loi binomiale

- Chaque prélèvement est constitué par 20 épreuves élémentaires indépendantes puisque le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.
 - Chaque épreuve élémentaire peut déboucher sur deux résultats et deux seulement : la pièce de type 2 est défectueuse, évènement de probabilité $p = P(E) = 0,03$ et la pièce de type 2 n'est pas défectueuse, évènement de probabilité $q = 1 - p = 0,97$.
 - La variable aléatoire Y associée à ces tirages le nombre total de pièces de type 2 défectueuses.

Donc Y suit la loi binomiale de paramètres 20 et 0,03.

- On demande

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= C_{20}^0 p^0 q^{20} \\ &= 0,97^{20} \\ &\simeq 0,54 \end{aligned}$$

- On demande la probabilité qu'une pièce au moins soit défectueuse, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) &= 1 - P(Y = 0) \\ &\simeq 0,46 \end{aligned}$$

C. Test d'hypothèse

1. \bar{Z} suit la loi normale de moyenne 400 et d'écart-type 0,5, alors la variable aléatoire $T = \frac{\bar{Z} - 400}{0,5}$ suit la loi normale centrée réduite.

$$\begin{aligned} P(400 - h \leq \bar{Z} \leq 400 + h) &= P\left(-\frac{h}{0,5} \leq T \leq \frac{h}{0,5}\right) \\ &= P(-2h \leq T \leq 2h) \\ &= \Pi(2h) - \Pi(-2h) \\ &= \Pi(2h) - [1 - \Pi(2h)] \\ &= 2\Pi(2h) - 1 \end{aligned}$$

$2\Pi(2h) - 1 = 0,95$ alors $\Pi(2h) = 0,975$.

Par lecture inverse de la table, on obtient $2h = 1,96$ c'est-à-dire $h = 0,98$.

2. D'après la question précédente, nous avons alors

$$P(399,02 \leq \bar{Z} \leq 400,98) = 0,95$$

La règle de décision permettant d'utiliser ce test est la suivante :

On prélève un échantillon aléatoire de 100 pièces, on mesure la hauteur des pièces et on calcule la moyenne \bar{z} de ces hauteurs :

- Si $\bar{z} \in [399,02 ; 400,98]$, on accepte l'hypothèse H_0 et on rejette H_1 , donc la livraison est conforme pour la hauteur,
- Si $\bar{z} \notin [399,02 ; 400,98]$, on rejette l'hypothèse H_0 et on accepte H_1 , donc la livraison n'est pas conforme pour la hauteur.

3. Ici $\bar{z} = 399,12$ donc $\bar{z} \in [399,02 ; 400,98]$: la livraison est conforme pour la hauteur, au seuil de 5%.

CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

**ÉLÉMENTS DE RÉPONSE
PROPOSITION DE BARÈME**

EXERCICE 1 (12 points)

A.1° $g(t) = k e^{-710t}$. 1 point

2° 1 point

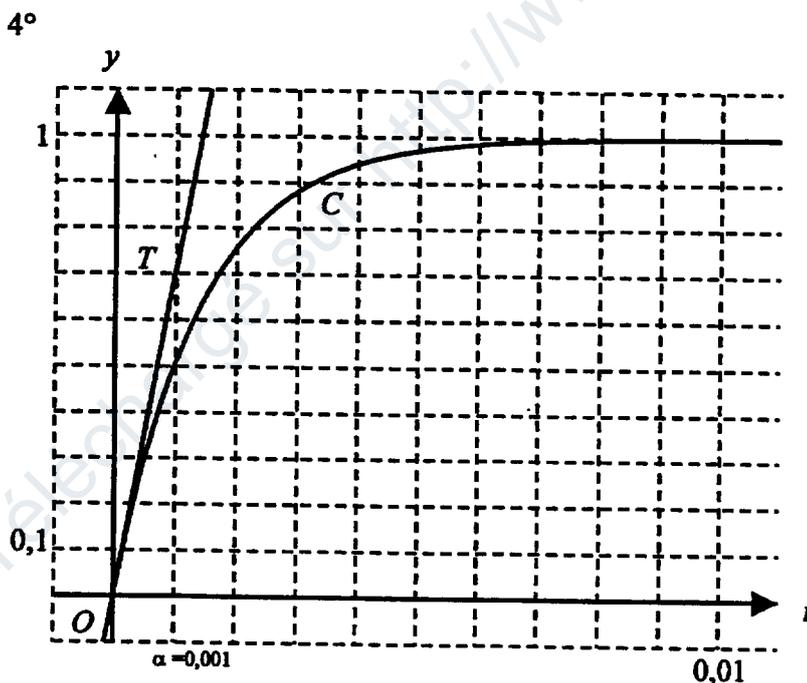
3° $f(t) = 1 + k e^{-710t}$. 0,5 point

4° $\varphi(t) = 1 - e^{-710t}$. 1 point

B.1° Pour tout $t \geq 0$, $\varphi'(t) = 710 e^{-710t}$.
 $\varphi'(t) > 0$. 1 point

2° a) On a $\varphi(t) = 1 - (1 - 710t + \frac{(710t)^2}{2} + t^2 \varepsilon(t))$.
 $\varphi(t) = 710t - \frac{(710t)^2}{2} + t^2 \varepsilon(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$. 1 point

b) Une équation de T est $y = 710t$. 0,5 point
La position de C par rapport à T est donnée par le signe de
 $-\frac{(710t)^2}{2}$. C est en dessous de T au voisinage de 0. 1 point



1 point

5° a) $\alpha = -\frac{\ln 0,5}{710} \approx 0,00098$. 1 point

b) Voir le graphique. 0,5 point

GROUPEMENT B DES BTS	SESSION 2007
Mathématiques Corrigé	MATGRB1 Corrigé
Durée : 2 heures	Page : 1/3

C.1° $I(t) = 710 \times \int_0^t x e^{-710x} dx.$

$$I(t) = 710 \times \left(\left[-\frac{x}{710} e^{-710x} \right]_0^t + \frac{1}{710} \int_0^t e^{-710x} dx \right).$$

$$I(t) = \left[-x e^{-710x} \right]_0^t + \left[-\frac{1}{710} e^{-710x} \right]_0^t$$

$$I(t) = -t e^{-710t} - \frac{1}{710} e^{-710t} + \frac{1}{710}.$$

1,5 point

2° $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \frac{1}{710} \approx 0,00141.$

1 point

Téléchargé sur <http://www.aidexam.com>

GROUPEMENT B DES BTS	SESSION 2007
Mathématiques Corrigé	MATGRB1 Corrigé
Durée : 2 heures	Page : 2/3

EXERCICE 2 (8 points)

A. $T = \frac{X - 30}{0,09}$ suit la loi normale centrée réduite.

$$P(29,8 \leq X \leq 30,2) \approx P(-2,22 \leq T \leq 2,22)$$

$$P(29,8 \leq X \leq 30,2) \approx 2 \times \Pi(2,22) - 1$$

$$P(29,8 \leq X \leq 30,2) \approx 2 \times 0,9868 - 1$$

$$P(29,8 \leq X \leq 30,2) \approx 0,97.$$

2 points

B. 1° • Chaque prélèvement de 20 pièces est constitué par 20 épreuves élémentaires indépendantes (puisque le prélèvement est associé à un tirage avec remise).

• Chaque épreuve élémentaire (le tirage d'une pièce) peut déboucher sur deux résultats et deux seulement : la pièce est défectueuse, événement de probabilité $p = 0,03$ et la pièce n'est pas défectueuse, événement de probabilité $q = 1 - p = 0,97$.

• Donc la variable aléatoire Y qui associe à ces tirages le nombre de pièces défectueuses suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,03$.

1,5 point

2° $P(X = 0) = 0,97^{20} \approx 0,54.$

1 point

3° $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0,46.$

1 point

C. 1° $h = 0,98.$

1 point

2° On prélève au hasard et avec remise, un échantillon de 100 pièces dans la livraison et on calcule la moyenne \bar{z} des hauteurs des pièces de cet échantillon.

La règle de décision est :

• Si \bar{z} appartient à l'intervalle $[399,02 ; 400,98]$, on accepte H_0 au seuil de 0,05.

• Sinon on rejette H_0 et on accepte H_1 .

1 point

3° $\bar{z} = 399,12$ appartient à l'intervalle d'acceptation.

On accepte l'hypothèse H_0 : la livraison est considérée comme conforme pour la hauteur.

0,5 point

GROUPEMENT B DES BTS	SESSION 2007
Mathématiques Corrigé	MATGRB1 Corrigé
Durée : 2 heures	Page : 3/3

21