

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2015

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 HEURES

La calculatrice est autorisée conformément à la réglementation. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Le sujet comporte trois problèmes indépendants.

Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

PROBLÈME I

Petits poids

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, et toute suite finie de n réels $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, on appelle *poids* de la suite la plus grande des valeurs $|x_1|, |x_1 + x_2|, \dots, |x_1 + x_2 + \dots + x_n|$.

Par exemple, pour $n = 4$ et $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 4, 0, -9)$, le poids de la suite est égal à 8, car

$$|x_1| = 4, |x_1 + x_2| = 8, |x_1 + x_2 + x_3| = 8 \quad \text{et} \quad |x_1 + x_2 + x_3 + x_4| = 1.$$

Pour $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-9, 4, 0, 4)$, le poids est égal à 9, car

$$|x_1| = 9, |x_1 + x_2| = 5, |x_1 + x_2 + x_3| = 5 \quad \text{et} \quad |x_1 + x_2 + x_3 + x_4| = 1.$$

On remarque que les deux suites finies ci-dessus sont formées des mêmes nombres dans un ordre différent et qu'elles ont des poids différents.

1° Déterminer le poids des suites finies suivantes :

- a) $(3, 5, -6, -8, 2)$ (et donc $n = 5$).
- b) $(1, 2, 3, \dots, 2014, 2015, -2015, -2014, \dots, -2, -1)$ (et donc $n = 4030$).
- c) Dans chacun des deux exemples précédents, réordonner les termes de façon à obtenir un poids plus petit.

On donne à Isabelle et Clara la même suite finie de n réels $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Isabelle veut la réordonner de façon à obtenir une suite finie de poids minimal. Pour cela, elle considère tous les ordres possibles de ces n réels, détermine pour chacun le poids de la suite correspondante, et choisit un ordre pour lequel le poids est minimal. On note I ce poids minimal.

De son côté, Clara, plus pressée qu'Isabelle, adopte l'algorithme suivant.

Elle commence par choisir parmi les n réels un nombre, noté c_1 , de sorte que la valeur de $|c_1|$ soit la plus petite possible. Elle choisit ensuite le nombre c_2 parmi les $n - 1$ réels qui restent, afin que la valeur de $|c_1 + c_2|$ soit la plus petite possible. Plus généralement, après avoir choisi les nombres $c_1, \dots, c_i$ parmi les n réels donnés au départ, elle choisit c_{i+1} parmi les $n - i$ restants de sorte que la valeur de $|c_1 + \dots + c_i + c_{i+1}|$ soit la plus petite possible.

Elle obtient finalement une suite finie $(c_1, \dots, c_n)$ de n réels. On note C son poids.

2° Déterminer I et C dans les deux cas suivants.

- a) $n = 3$ et $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -4$.
- b) $n = 4$ et $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2$.

3° Si $n = 2$, montrer que $I = C$.

4° Si $n = 3$, montrer que $C \leq \frac{3}{2}I$.

5° Soit n un entier supérieur ou égal à 4 et soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ la suite finie donnée à Isabelle et Clara.

On pose

$$M = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \quad S = |x_1 + x_2 + \dots + x_n| \quad N = \max(M, S).$$

Autrement dit, M est le plus grand des nombres $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|$. De même, N est le plus grand des nombres M et S .

- a) Montrer que $S \leq I$.
- b) Montrer que $M \leq 2I$.
- c) Montrer que $C \leq N$.
- d) En déduire que $C \leq 2I$.
- e) Déterminer n réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ tels que $C = 2I$.

PROBLÈME II

Tétraèdres

On appelle *tétraèdre* la donnée, dans l'espace, de quatre points non coplanaires A, B, C, D . Les *arêtes* du tétraèdre sont les segments $[AB], [AC], [AD], [BC], [BD], [CD]$.

Dans les questions 1° à 3°, $ABCD$ désigne un tétraèdre.

- 1° a) Montrer qu'il existe un unique point G tel que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$.
b) Montrer que $\vec{AG} = \frac{3}{4}\vec{AG_A}$, où G_A est le centre de gravité du triangle BCD .
c) On appelle *médiane* issue de A la droite reliant A au centre de gravité du triangle BCD , et on définit de façon analogue les trois autres médianes, issues de B , de C et de D . Montrer que les médianes sont concourantes au point G .
- 2° Montrer qu'il existe une unique sphère qui passe par A, B, C, D . On l'appelle *sphère circonscrite* au tétraèdre $ABCD$ et on note O son centre.
- 3° On appelle *hauteur* issue de A la droite passant par A et orthogonale au plan BCD . On définit de façon analogue les trois autres hauteurs, issues de B , de C et de D . On dit qu'un tétraèdre de l'espace est *régulier* si toutes ses arêtes sont de même longueur.
 - a) Est-il vrai que les hauteurs sont concourantes en O si et seulement si le tétraèdre est régulier?
 - b) Les hauteurs sont-elles nécessairement concourantes?
 - c) Est-il vrai que les hauteurs sont concourantes en G si et seulement si le tétraèdre est régulier?
- 4° Dans ce qui suit, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est noté $\vec{v} \cdot \vec{w}$.
Soit $\Delta_1, \dots, \Delta_4$ quatre droites distinctes non coplanaires concourantes en un point H . Pour $1 \leq i \leq 4$, on choisit un vecteur directeur unitaire $\vec{u}_i$ de Δ_i et, pour $1 \leq i, j \leq 4$, on note $c_{ij} = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j$.
 - a) On suppose qu'il existe un tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$ dont les hauteurs sont concourantes en H et tel que $A_j \in \Delta_j$ pour tout $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Montrer que $c_{12}c_{34} = c_{13}c_{24} = c_{14}c_{23}$.
 - b) Réciproquement, si $c_{12}c_{34} = c_{13}c_{24} = c_{14}c_{23} \neq 0$, montrer qu'il existe un tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$ dont les hauteurs sont concourantes en H et tel que $A_j \in \Delta_j$ pour tout $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

PROBLÈME III

Moyennes prévisionnelles

Dans ce problème, on considère des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (u_1, u_2, \dots)$ à valeurs réelles indexées par les entiers naturels non nuls. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de type $\mathcal{M}$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est la moyenne des n termes suivants, c'est-à-dire

$$u_n = \frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{2n-1} + u_{2n}}{n}.$$

- 1° Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de type $\mathcal{M}$ et C un nombre réel. Que dire de la suite $(u_n - C)_{n \in \mathbb{N}^*}$?
- 2° Montrer que toute suite croissante de type $\mathcal{M}$ est constante.
- 3° Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de type $\mathcal{M}$. On suppose qu'il existe des réels a, b, c tels que $u_n = an^2 + bn + c$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a = b = 0$.
- 4° L'objectif de cette question 4° est de montrer que toute suite majorée ou minorée de type $\mathcal{M}$ est constante.
Dans les questions a) et b), on suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de type $\mathcal{M}$ à valeurs positives ou nulles, et on considère un entier $r \in \mathbb{N}^*$.
 - a) Soit p un entier tel que $p > r$. Montrer qu'il existe des entiers naturels non nuls q et q' tels que $q < p \leq q' \leq 2q$ et $u_{q'} \leq u_q \leq u_r$. En déduire que $u_p \leq 3u_r$.
 - b) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que $u_p \leq 3u_r$.Dans les questions c) et d), on suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite minorée de type $\mathcal{M}$.
 - c) Soit D un réel strictement positif et soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $u_p - D$ n'est pas un minorant de la suite (u_n) , alors $u_p - \frac{3}{2}D$ n'est pas non plus un minorant.
 - d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante.
 - e) Conclure.
- 5° Existe-t-il une suite non constante de type $\mathcal{M}$?