CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2014

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 HEURES

La calculatrice est autorisée conformément à la réglementation.
La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Le sujet comporte trois problèmes indépendants.
Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

PROBLÈME I

Stabilité géométrique

Dans tout le problème, ε et q sont deux réels strictement positifs.
On considère une suite (x_n) de réels telle que $x_0 > 0$ et, pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant x_{n+1} - qx_n \leqslant \varepsilon.$$

1° Pour tout entier naturel n, on pose $b_n = x_{n+1} - qx_n$.
Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$x_n = q^n x_0 + q^{n-1} b_0 + q^{n-2} b_1 + \cdots + q b_{n-2} + b_{n-1}.$$

2° Dans cette question, on suppose que $0 < q < 1$.

a) Montrer qu'il existe une suite géométrique (y_n) telle que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$|y_n - x_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{1-q}.$$

b) Montrer qu'il existe en fait une infinité de telles suites géométriques (y_n).

3° Dans cette question, on suppose que $q > 1$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \dfrac{b_0}{q} + \dfrac{b_1}{q^2} + \cdots + \dfrac{b_{n-1}}{q^n}$.

a) Montrer que la suite (u_n) converge.
On note s sa limite.

b) Pour tout $n \geqslant 1$, montrer $0 \leqslant s - u_n \leqslant \dfrac{\varepsilon}{q^n(q-1)}$.

c) Montrer qu'il existe une unique suite géométrique (y_n) telle que, pour tout entier naturel n,

$$|y_n - x_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{q-1}.$$

PROBLÈME II

Vite « pile »

Dans ce problème, k et n sont des entiers supérieurs ou égaux à 2.
Un groupe de k joueurs dispose d'une pièce de monnaie non supposée équilibrée, pour laquelle la probabilité d'obtenir « pile » dans un lancer est notée p, avec $0 < p < 1$.
Chaque joueur lance la pièce au plus n fois en s'arrêtant s'il obtient « pile » : son score est alors le nombre d'échecs, c'est-à-dire le nombre de « face ». Ainsi, si un joueur obtient « pile » au premier lancer, son score est 0 et la partie s'arrête ; s'il obtient « pile » au deuxième lancer (après un « face »), son score est 1 ; s'il obtient « pile » au n-ième lancer (après $n-1$ « face »), son score est $n-1$; s'il n'obtient pas « pile » durant les n lancers, son score est n.
Après les lancers, chaque joueur a un score. Le ou les gagnants sont les joueurs qui ont réalisé le plus petit score.

1° Déterminer la loi de probabilité du score d'un joueur donné.

2° Déterminer la probabilité qu'il y ait un unique gagnant, puis la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini.

3° Déterminer l'espérance du nombre de gagnants, puis la limite de cette espérance quand n tend vers l'infini.

PROBLÈME III

Des chiffres pour des lettres

Un *mot de longueur n* est une suite de n lettres choisies parmi les 10 lettres $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$. Par exemple, BEC, $JJCD$, $AFFICHAGE$, $ABCDEFGHIJ$ sont des mots de longueurs respectives 3, 4, 9, 10.
Une *attribution* du mot ω est un nombre dont l'écriture décimale est obtenue en remplaçant chaque lettre de ω par un des chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, de sorte que des lettres identiques sont remplacées par le même chiffre et que deux lettres distinctes sont remplacées par des chiffres différents. Il est permis que le premier chiffre de l'attribution soit égal à 0. Par exemple, 121 et 040 = 40 sont deux attributions pour le mot GAG, mais 333 et 452 n'en sont pas ; 555 et 000 = 0 sont des attributions de AAA, mais pas 112 ou 789.

Soit d un entier strictement positif. On dit que le mot ω est *un bloqueur* de d si toute attribution de ω est un nombre non divisible par d. Ainsi le mot $\omega = AABCA$ n'est pas un bloqueur de $d = 4$, car 66716 est une attribution de ω qui est divisible par 4.

1° a) Montrer que le mot AB est un bloqueur de $d = 100$.
   b) Montrer que tout nombre d'au moins trois chiffres admet un bloqueur.

Le nombre $d > 0$ est dit *mauvais* s'il admet au moins un bloqueur. Sinon, on dit que d est *bon*. La question précédente montre que tout nombre d'au moins trois chiffres est mauvais.

2° a) Montrer que 10 est bon.
   b) Montrer que 8 est bon.
   c) Montrer que le mot AAB est un bloqueur de 27.
   d) Montrer que le mot $ABBAB$ est un bloqueur de 32.
   e) Un diviseur positif d'un nombre bon est-il forcément bon ? Un diviseur positif d'un nombre mauvais est-il forcément mauvais ?

Si k est un entier strictement positif et si X est une lettre, on note X^k le mot $XX\ldots X$ formé de k lettres X.

3° a) Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 7 et soit ω le mot défini par :

$$\omega = AAA^{p-2}BA^{p-2}CA^{p-2}DA^{p-2}EA^{p-2}FA^{p-2}GA^{p-2}HA^{p-2}IA^{p-2}JA^{p-2}.$$

   Montrer que ω est un bloqueur de p.

   On pourra utiliser librement le petit théorème de Fermat : si x est un entier non divisible par p, alors p divise $x^{p-1}-1$.

   b) Montrer qu'il existe au plus 27 nombres bons.

4° Soit ω un mot de longueur n, et a une attribution de ω.

   On note a' l'attribution de ω obtenue à partir de de a en permutant circulairement, dans cet ordre, les chiffres $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ sans toucher aux 9 : autrement dit, dans l'écriture décimale de a, les chiffres $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ sont respectivement remplacés par $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0, 9$. Par exemple, si $a = 1789$, alors $a' = 2809$.

   Soit k le nombre d'apparitions du chiffre 9 dans l'écriture décimale de a.

   a) Si a est congru à r modulo 9, à quoi est congru a' modulo 9 ?
   b) En déduire que si k n'est pas congru à n modulo 3, alors il existe une attribution de ω divisible par 9.
   c) Montrer qu'il en est de même si k est congru à n modulo 3, mais pas modulo 9.
   d) Montrer que 9 est bon.

5° Montrer que 18 est bon.

6° Montrer que si un nombre est mauvais, il admet une infinité de bloqueurs.

Pour information, on peut montrer qu'il existe exactement 22 *nombres bons. Ce sont les diviseurs positifs des nombres* 18, 24, 45, 50, 60, 80.