

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2013

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 HEURES

La calculatrice est autorisée conformément à la réglementation. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Le sujet comporte trois problèmes indépendants.

Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

PROBLÈME I

De superbes suites

Dans ce problème, on considère des suites finies $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ d'entiers strictement positifs, où n est un entier supérieur ou égal à 2, appelé *longueur* de la suite finie.

On dit qu'une suite finie d'entiers strictement positifs est *superbe* si chacun de ses termes divise la somme de tous les termes.

Par exemple, la suite $(1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2)$ est superbe de longueur 8 car $1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 = 12$, qui est divisible par 1 et par 2 ; la suite $(3, 3, 6, 12)$ est superbe de longueur 4 car la somme des termes vaut 24, qui est multiple de 3, 6, 12.

- 1° Déterminer les entiers strictement positifs b tels que la suite $(21, 7, b)$ soit superbe.
- 2° a) Déterminer les suites superbes de longueur 2, puis celles de longueur 3.
b) Déterminer les suites superbes de longueur 4 et dont la somme des termes vaut 2013.
- 3° a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, il existe une suite superbe de longueur n dont les termes sont tous distincts.
b) Montrer que, si $n \geq 2$, il n'existe pas de suite superbe de longueur n dont les termes sont des nombres premiers tous distincts.
- 4° Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ une suite arithmétique finie de raison strictement positive.
Montrer que si cette suite est superbe alors $n = 3$.
- 5° On dit qu'une suite (infinie) $(a_k)_{k \geq 1}$ d'entiers strictement positifs est *magnifique* si, pour tout entier $n \geq 2$, la suite finie $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ est superbe.
Déterminer les suites magnifiques $(a_k)_{k \geq 1}$ vérifiant $a_k < a_{k+1}$ pour tout entier $k \geq 2$.
- 6° Soit n un entier supérieur ou égal à 4, et soit $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ une suite finie, pas forcément superbe, d'entiers strictement positifs tous distincts.
a) Montrer qu'il est possible de prolonger la suite de façon à obtenir une suite superbe.
b) Montrer qu'il est possible de prolonger la suite de façon à obtenir une suite superbe dont les termes sont tous distincts.

PROBLÈME II

Tiré à quatre épingles

- 1° Dans l'espace, soit D_1, D_2 deux droites non coplanaires et soit M un point n'appartenant ni à D_1 ni à D_2 . Montrer qu'il existe au plus une droite passant par M et coupant à la fois D_1 et D_2 . Dans quel cas n'en existe-t-il aucune ?

L'espace étant muni d'un repère orthonormé, soit $ABCDEFGH$ le cube dont les sommets ont pour coordonnées $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 1, 0)$, $D(0, 1, 0)$, $E(0, 0, 1)$, $F(1, 0, 1)$, $G(1, 1, 1)$, $H(0, 1, 1)$. Soit respectivement D_1, D_2 et D_3 les droites (EF) , (BC) et (DH) .

Enfin, soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des points de coordonnées $M(x, y, z)$ tels que

$$xy + yz + zx - (x + y + z) + 1 = 0.$$

- 2° Donner une représentation paramétrique de chacune des droites D_1, D_2 et D_3 .
- 3° Montrer que les droites D_1, D_2 et D_3 sont incluses dans $\mathcal{S}$.
- 4° Montrer que toute droite de l'espace non incluse dans $\mathcal{S}$ rencontre $\mathcal{S}$ en 0, 1 ou 2 points.
- 5° En déduire que toute droite coupant les droites D_1, D_2 et D_3 est incluse dans $\mathcal{S}$.
- 6° Soit D_4 une droite qui ne rencontre aucune des droites D_1, D_2, D_3 et qui n'est pas incluse dans $\mathcal{S}$.
Montrer qu'il existe au plus deux droites de l'espace coupant les quatre droites D_1, D_2, D_3, D_4 .

PROBLÈME III

Il faut passer les premiers

Pour ce problème, on donne la liste des vingt-cinq nombres premiers inférieurs à 100 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Pour faire une réussite, Sisyphe a dessiné au sol 106 cases numérotées de 0 à 105, et il dispose d'un jeton et d'un dé à six faces (équilibré).

Sisyphe commence la réussite en posant le jeton sur la case 0. Il fait ensuite une série de lancers du dé ; lorsque le dé affiche la valeur k , il avance le jeton de k cases et :

- s'il atteint ou dépasse la case numéro 100, Sisyphe a gagné ;
- s'il arrive à une case dont le numéro est un nombre premier inférieur à 100, Sisyphe a perdu ;
- dans les autres cas, Sisyphe relance le dé et continue la réussite.

1° Dans cette question, on suppose que Sisyphe recommence une réussite lorsqu'il a perdu.

On note p_n la probabilité de gagner au moins une réussite en au plus n lancers du dé.

- a) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $p_n > 0$.
- b) Étudier la convergence de la suite (p_n) .

Dans la suite du problème, Sisyphe ne recommence plus la réussite s'il perd.

Soit X la variable aléatoire représentant la position du jeton à la fin de la réussite.

On note $P(X = k)$ la probabilité de l'événement $X = k$.

2° a) Déterminer $P(X = 2)$, $P(X = 3)$, $P(X \geq 4)$, $P(X = 5)$.

b) Proposer un algorithme pour calculer $P(X = k)$ pour tout $k \in \{0, \dots, 105\}$.

3° Muni d'une calculatrice qui n'est pas assez performante pour exécuter l'algorithme précédent, Sisyphe cherche à estimer sa probabilité de gain. Pour cela, étant donné deux nombres premiers consécutifs $p < p'$, il considère α_p la probabilité conditionnelle de l'événement $X = p'$ sachant l'événement $X > p$.

- a) Que valent α_2 et α_3 ?
- b) Donner l'expression de la probabilité de gain, $P(G) = P(X \geq 100)$, en fonction des nombres réels α_p pour $p = 2, 3, 5, \dots$
- c) Donner un encadrement des nombres α_p et en déduire un encadrement de $P(G)$. (Dans cette question, la qualité de l'encadrement sera un élément d'appréciation.)

* *
*