

BTS Industriels



Session 2022

Épreuve : **Mathématiques Groupe B2**

Durée de l'épreuve : 2 heures

Sujet

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SESSION 2022

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B

CODE : 22MATGRB2

Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉ	COEFFICIENT
Conception et industrialisation en microtechniques	1,5
Électrotechnique	2

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collègue » est autorisé.

Document-réponse à rendre avec la copie :

Document-réponse page 7/7

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il soit complet.
Le sujet comporte 7 pages, numérotées de 1/7 à 7/7.

GROUPEMENT B DES BTS		Session 2022
Mathématiques	Code : 22MATGRB2	Page : 1/7

EXERCICE 1 (10 points)

Un chariot d'une fête foraine est propulsé à une vitesse de 20 m.s^{-1} sur un axe horizontal, puis il est ralenti par un système de freinage.

On s'intéresse à la vitesse du chariot durant le freinage.

On note $f(t)$ la vitesse du chariot à l'instant t .

$f(t)$ est exprimé en mètre par seconde, et t est exprimé en seconde.

L'instant $t = 0$ correspond à l'instant où le chariot commence à être pris en charge par le système de freinage. On a donc $f(0) = 20$.

On suppose que f est une fonction dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 0,8y = 4 ,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t , définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$, et où y' est la fonction dérivée de y .

1. a. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + 0,8y = 0$.

On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$y' + ay = 0$	$y(t) = ke^{-at}$

- b. Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = 5$.

Vérifier que la fonction g est solution de l'équation différentielle (E) .

- c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) .

2. On rappelle que $f(0) = 20$.

Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 20$.

Partie B - Étude de la fonction f .

On admet que la fonction f est définie pour tout t appartenant à $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(t) = 15 e^{-0,8t} + 5.$$

Sa courbe représentative C dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



1.a. Démontrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 5$.

b. En déduire que la courbe C admet une asymptote dont on donnera une équation.

2. On admet que, pour tout réel t appartenant à $[0 ; +\infty[$, on a :

$$f'(t) = -12e^{-0,8t}.$$

Dresser le tableau de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.

3. Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?

4. Soit F la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $F(t) = -18,75 e^{-0,8t} + 5t$.

a. Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.

b. On admet que la distance d , exprimée en mètre, parcourue par le chariot entre les instants t_0 et t_1 , est donnée par :

$$d = \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt.$$

Calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre les instants $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$. Donner une valeur arrondie au centimètre.

Partie C - Étude locale.

On rappelle que l'on étudie la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(t) = 15 e^{-0,8t} + 5 .$$

On rappelle que sa courbe représentative C est reproduite au début de la **partie B**.

Un logiciel de calcul formel affiche la partie régulière du développement limité à l'ordre 2 de la fonction f au voisinage de zéro.

1	PolynômeTaylor(f(t), t, 0, 2)
	$\rightarrow 20 - 12 t + \frac{24}{5} t^2$

1. Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.

Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Le développement limité de la fonction f à l'ordre 2 au voisinage de zéro est :

$20 - 12 t + \frac{24}{5} t^2 + \epsilon(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \epsilon(t) = 0$	$20 + \frac{24}{5} t^2$	$20 - 12 t + 4,8 t^2 + t^2 \epsilon(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \epsilon(t) = 0$
---	-------------------------	--

2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

EXERCICE 2 (10 points)

La fonction échelon unité $\mathcal{U}$ est définie par $\mathcal{U}(t) = 0$ si $t < 0$ et $\mathcal{U}(t) = 1$ si $t \geq 0$.

On considère le système électrique entrée-sortie schématisé ci-dessous.

On note $s(t)$ le signal de sortie associé au signal d'entrée $e(t)$.



Les fonctions $e(t)$ et $s(t)$ sont des fonctions causales, c'est-à-dire qu'elles sont nulles pour $t < 0$.

On admet que les fonctions $e(t)$ et $s(t)$ admettent des transformées de Laplace notées respectivement $E(p)$ et $S(p)$.

La fonction de transfert $H(p)$ du système est définie par $S(p) = H(p) \times E(p)$.

On a $e(t) = 2\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - 1)$ et $H(p) = \frac{1}{p + 1}$.

On pourra utiliser le formulaire page suivante.

Partie A - signal d'entrée.

1. Sur le **document-réponse à rendre avec la copie**, tracer la courbe représentative de la fonction $e(t)$.
2. Déterminer $E(p)$.

Partie B - signal de sortie.

1. Démontrer que
$$S(p) = \frac{2}{p(p + 1)} - \left(\frac{1}{p(p + 1)} \right) e^{-p}.$$
2. Vérifier que
$$\frac{1}{p(p + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1}.$$
3. Donner $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)$, $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right)$, $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p} \cdot e^{-p}\right)$ et $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1} \cdot e^{-p}\right)$.
4. En déduire l'expression de $s(t)$ sur l'intervalle $[0 ; 1[$.
5. On admet que sur $[1 ; +\infty[$ on a :

$$s(t) = (e - 2)e^{-t} + 1.$$

- a. Calculer $s(1)$. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.
- b. Sur le **document-réponse à rendre avec la copie**, compléter la courbe représentative de la fonction s .
- c. Donner la limite de la fonction $s(t)$ en $+\infty$.

FORMULAIRE POUR L'EXERCICE 2

Transformation de Laplace	
Fonction	Transformée de Laplace
$t \mapsto \mathcal{U}(t)$	$p \mapsto \frac{1}{p}$
$t \mapsto \mathcal{U}(t - a)$	$p \mapsto \frac{1}{p} e^{-ap}$
$t \mapsto e^{-at} \mathcal{U}(t)$, avec a constante réelle	$p \mapsto \frac{1}{p + a}$
Propriétés	
Fonction	Transformée de Laplace
$t \mapsto f(t) \mathcal{U}(t)$	$p \mapsto F(p)$
$t \mapsto f(t - a) \mathcal{U}(t - a)$, avec a constante réelle	$p \mapsto F(p) e^{-ap}$
$t \mapsto f(t) e^{-at} \mathcal{U}(t)$, avec a constante réelle	$p \mapsto F(p + a)$
$t \mapsto f'(t) \mathcal{U}(t)$	$p \mapsto pF(p) - f(0^+)$