∽ BTS Métropole mai 2022 ∾
Groupement B1

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé
L'usage de calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé

Exercice 1 : un problème de routage **5 points**

Un chariot d'une fête foraine est propulsé à une vitesse de 20 m.s^{-1} sur un axe horizontal, puis il est ralenti par un système de freinage.
On s'intéresse à la vitesse du chariot durant le freinage.
On note $f(t)$ la vitesse du chariot à l'instant t.
$f(t)$ est exprimé en mètre par seconde, et t est exprimé en seconde.
L'instant $t = 0$ correspond à l'instant où le chariot commence à être pris en charge par le système de freinage. On a donc $f(0) = 20$.

On suppose que f est une fonction dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A - Résolution d'une équation différentielle.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E): \quad y' + 0,8y = 4,$$

où y est une fonction inconnue et où y' est la fonction dérivée de y.

1. **a.** Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $\quad y' + 0,8y = 0$.
On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$y' + ay = 0$	$y(t) = k\mathrm{e}^{-at}$

b. Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = 5$.
Vérifier que la fonction g est solution de l'équation différentielle (E).

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E)

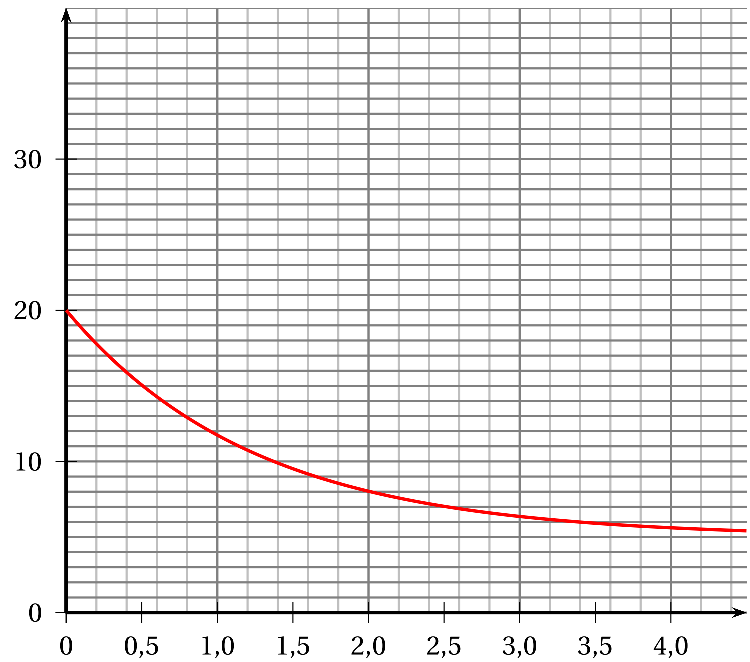
2. On rappelle que $f(0) = 20$.
Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale : $f(0) = 20$.

Partie B - Étude de la fonction *f*

On admet que la fonction f est définie pour tout t appartenantà $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = 15\mathrm{e}^{-0,8t} + 5.$$

Sa courbe représentative C dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



1. **a.** Démontrer que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 5$.

   b. En déduire que la courbe C admet une asymptote dont on donnera une équation.

2. On admet que, pour tout réel t appartenant à $[0~;~+\infty[$ on a :

$$f'(t) = -12\mathrm{e}^{-0,8t}.$$

   Dresser le tableau de variation de f sur $[0~;~+\infty[$.

3. Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?

4. Soit F la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par $F(t) = -18,75\mathrm{e}^{-0,8t} + 5t$.

   a. Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$.

   b. On admet que la distance d, exprimée en mètre, parcourue par le chariot entre les instants t_0 et t_1 est donnée par :

$$d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre l'instant $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$. Donner une valeur arrondie au centimètre.

Partie C – Étude locale

On rappelle que l'on étudie la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(t) = 15\mathrm{e}^{-0,8t} + 5.$$

On rappelle que sa courbe représentative C est reproduite au début de la partie B.
Un logiciel de calcul formel affiche la partie régulière du développement limité à l'ordre 2 de la la fonction f au voisinage de 0.

1	PolynômeTaylor$(f(t), t, 0, 2)$ $\leftarrow 20-12t+\dfrac{24}{5}t^2$

1. Cette question est une question à choix multiple. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous parait exacte. On ne demande aucune justification.

Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de rapporte ne rapporte ni n'enlève de point.

Le développement limité de la fonction f à l'ordre 2 au voisinage de zéro est :

$20-12t+\dfrac{24}{5}t^2+\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$	$20+\dfrac{24}{5}t^2$	$20-12t+4,8t^2+t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$

2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0;

Exercice 2 — 10 points

Une usine fabrique des tubes fluorescents. Des tests de conformité permettent de vérifier si les tubes présentent un défaut.

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A - Probabilités conditionnelles

L'entreprise possède deux ateliers de production des tubes : atelier 1 et atelier 2.

- L'atelier 1 produit 30 % des tubes.
  - Parmi eux, 1,5 % présentent un défaut.
- L'atelier 2 produit 70 % des tubes.
  - Parmi eux, 2,5 % présentent un défaut.

On prélève au hasard un tube parmi la production totale de l'usine. On définit les évènements suivants :

- A_1 : « le tube provient de l'atelier 1 »;
- A_2 : « le tube provient de l'atelier 2 »;
- D : « le tube présente un défaut ».

1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation.

2. Calculer la probabilité $P(A_1 \cap D)$.

3. Montrer que $P(D) = 0,022$.

4. On sait que le tube ne présente pas de défaut.
Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2?

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

On considère la variable aléatoire T qui, à tout tube fluorescent prélevé au hasard dans le stock, associe sa durée de bon fonctionnement en heure.
On suppose que T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}000\,1$.
On rappelle les formules suivantes :

Loi exponentielle	
$P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$	$E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$

1. Déterminer l'espérance $E(T)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.
2. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2} , que la durée de bon fonctionnement du tube fluorescent prélevé soit inférieure à 8 000 heures.
3. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, que la durée de bon fonctionnement du tube fluorescent prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

Partie C - Intervalle de confiance

La fixation des tubes fluorescents se fait à l'aide de rivets produits dans une usine.
On cherche la proportion p de rivets conformes parmi l'ensemble de la production.
Pour cela, on prélève au hasard dans la production un échantillon de 1 000 rivets. Ce prélèvement peut être assimilé à un tirage au sort avec remise.
On constate que, sur les 1 000 rivets prélevés, 975 d'entre eux sont conformes.

1. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p.
2. Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1 000 rivets ainsi prélevé, associe la fréquence, dans cet échantillon, des rivets conformes.

   On admet que F suit la loi normale de moyenne p inconnue et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{1\,000}}$.

   On donne la formule suivante :

Intervalle de confiance d'une proportion au niveau de confiance de 95 %.
$\left[f - 1{,}96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\ ;\ f + 1{,}96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right]$

   Déterminer un intervalle de confiance centré sur f de la proportion p au niveau confiance de 95 %.

   Arrondir les bornes de l'intervalle à 10^{-3} près.