BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SESSION 2023

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B *CODE : 23MATGRB1*

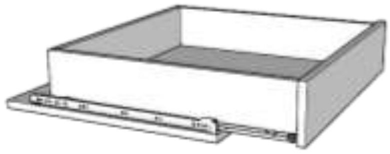
Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉS	COEFFICIENTS
Aéronautique	2
Assistance technique d'ingénieur	2
Bâtiment	2
Conception et réalisation de carrosseries	2
Conception et réalisation des systèmes automatiques	2
Enveloppe des bâtiments : conception et réalisation	2
Environnement nucléaire	2
Fluides – énergies – domotique (3 options)	2
Maintenance des systèmes (3 options)	2
Traitement des matériaux (2 options)	3
Travaux publics	2

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 6 pages, numérotées de 1/6 à 6/6.

EXERCICE 1 (10 points)



Lorsqu'un tiroir se referme, le fond du tiroir, marqué par le point M, se rapproche du fond du meuble, marqué par le point O (voir croquis ci-dessus).

On note $f(t)$, la distance entre le point O et le point M, à l'instant t.
$f(t)$ est exprimée en centimètre, et t est exprimée en seconde.

L'instant $t = 0$ correspond au moment où l'utilisateur pousse le tiroir pour le fermer.

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E_0) : \; y'' + 5y' + 4y = 0 \; ,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur $[\, 0 \,; +\infty \,[$, et où y' est la dérivée de y, et y'' la dérivée seconde de y.

1. a. Résoudre l'équation : $r^2 + 5r + 4 = 0$.

b. Résoudre l'équation différentielle (E_0).
On fournit le tableau suivant :

	Équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$.	Équation différentielle : $ay'' + by' + cy = 0$.
$\Delta > 0$	2 solutions réelles distinctes : r_1 et r_2.	$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$.
$\Delta = 0$	1 solution réelle : r_0.	$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{r_0 t}$.
$\Delta < 0$	2 solutions complexes conjuguées. $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$	$y(t) = (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)) e^{\alpha t}$.

2. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la situation est la suivante :

- le point M est situé à 20 cm du point O.
- le point M se déplace vers le point O avec une vitesse négative égale à -10 cm·s^{-1}.

a. En déduire la valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.

b. On admet que :

$$f(t) = \frac{70}{3}\,e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t} \; .$$

Déterminer la valeur exacte de la distance OM, deux secondes après le début de la fermeture.

c. Le tiroir est dit *fermé* lorsque la distance OM est inférieure à $0{,}5$ cm.
Le constructeur affirme que le tiroir est *fermé* en moins de 4 secondes.
A-t-il raison ? Justifier.

Partie B. Étude de fonction.

On considère à nouveau la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{70}{3}\,\mathrm{e}^{-t} - \frac{10}{3}\mathrm{e}^{-4t}\ .$$

On admet que la fonction f est dérivable et on note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1. a. On rappelle que $\lim\limits_{u\to+\infty} \mathrm{e}^{-u} = 0$. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

b. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ possède une asymptote dont on donnera une équation.

2. a. Déterminer $f'(t)$ pour tout t appartenant à $[0\,;\,+\infty[$.

b. On admet que sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ on a $f'(t) < 0$.
En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

3. On considère l'algorithme suivant :

```
t←0
p←0,1
s←0,5
Tant que (70/3)*e^(-t) – (10/3)*e^(-4t) > s
         t←t+p
Fin Tant que.
```

a. Recopier le tableau ci-dessous, au besoin en rajoutant des lignes, et compléter à partir de la ligne numéro 36 jusqu'à ce que l'algorithme s'arrête.

ligne	t	Valeur de f(t) arrondie à 10^{-2}.	Condition (70/3)*e^(-t)-(10/3)*e^(-4t)>s
ligne numéro 0	0	20	VRAIE
ligne numéro 1	0,1	18,88	VRAIE
ligne numéro 2	0,2	17,61	VRAIE
ligne numéro 36	3,6	….	….
ligne numéro 37	3,7	….	….
ligne numéro 38	3,8	….	….

b. Quelle est la valeur de la variable `t` à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. On note T la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
Un logiciel de calcul formel donne la partie régulière du développement limité à l'ordre deux de la fonction f au voisinage de zéro.

f(t)
$\rightarrow \frac{70}{3} e^{-t} - \frac{10}{3} e^{-4t}$
PolynômeTaylor(f(t), t, 0, 2)
$\rightarrow 20 - 10t - 15t^2$

a. Déterminer une équation de la tangente T.

★★★

Les questions b. et c. sont des questions à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous parait exacte. On ne demande aucune justification. Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

b. Le développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de zéro est :

$20 - 10t - 15t^2 + t^2\varepsilon(t)$ Avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$	$20 - 10t - 15t^2 + \varepsilon(t)$ Avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$	$20 - 10t - 15t^2\varepsilon(t)$ Avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$	$-15t^2 + t^2\varepsilon(t)$ Avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$

c. On s'intéresse à la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la tangente T au voisinage de 0.

On peut affirmer que :

La courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de la tangente T.	La courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de la tangente T.

EXERCICE 2 (10 points)

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.

On s'intéresse à un magasin de vélos.

Partie A. Probabilités conditionnelles.

Le magasin décide de prêter gratuitement pendant un jour des vélos à des clients dans l'espoir que cela débouche sur une vente.

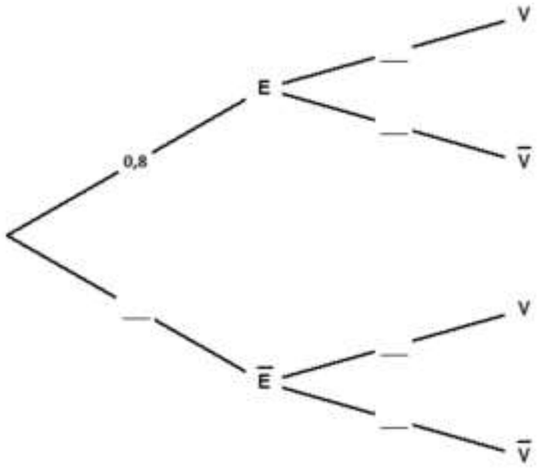
- 80% des vélos prêtés sont des vélos électriques.
  ➔ Cela débouche sur une vente dans 60% des cas.

- 20% des vélos prêtés sont des vélos mécaniques.
  ➔ Cela débouche sur une vente dans 70% des cas.

On choisit au hasard l'un des vélos prêtés. On considère les évènements suivants :

E : « il s'agit d'un vélo électrique »

V : « le prêt débouche sur une vente ».



1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre décrivant la situation.

2. Déterminer la probabilité $P(E \cap V)$.

3. Démontrer que la probabilité que le prêt débouche sur une vente est égale à $0{,}62$.

4. On considère un vélo pour lequel le prêt a débouché sur une vente. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un vélo électrique ? Arrondir à 10^{-3}.

Partie B. Loi binomiale.

Le magasin assure aussi la réparation de vélos.

On sait que, dans 62% des cas, la réparation d'un vélo nécessite moins d'une heure de main-d'œuvre.

On considère un échantillon aléatoire de 80 vélos réparés.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de ceux dont la réparation a nécessité moins d'une heure de main-d'œuvre.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
Donner ses paramètres.

2. Déterminer la probabilité $P(X = 40)$. Arrondir à 10^{-3}.

3. Déterminer la probabilité que, dans l'échantillon, le nombre de vélos nécessitant moins d'une heure de main d'œuvre soit strictement supérieur au nombre de vélos nécessitant plus d'une heure de main d'œuvre. Arrondir à 10^{-3}.

Partie C. Intervalle de confiance.

Le magasin souhaite estimer la proportion p des clients susceptibles d'acheter un modèle haut de gamme.

Pour cela, on prélève un échantillon aléatoire de 90 clients. Ce prélèvement peut être assimilé à un tirage au sort avec remise.

On constate que, sur les 90 clients de l'échantillon, 54 sont susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme.

1. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p des clients susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme.

2. Soit F la variable aléatoire, qui, à tout échantillon aléatoire de 90 clients, associe la fréquence des clients susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme.

On suppose que la variable aléatoire F suit une loi normale de moyenne inconnue p et d'écart-type $\sqrt{\frac{p(1-p)}{90}}$. On fournit la formule ci-dessous :

Intervalle de confiance d'une proportion à 95 %
$\left[f - 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}\,; f + 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}\right]$

a. Déterminer un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95%, de la proportion p.

b. Est-on certain que la proportion p appartienne à cet intervalle de confiance ?