

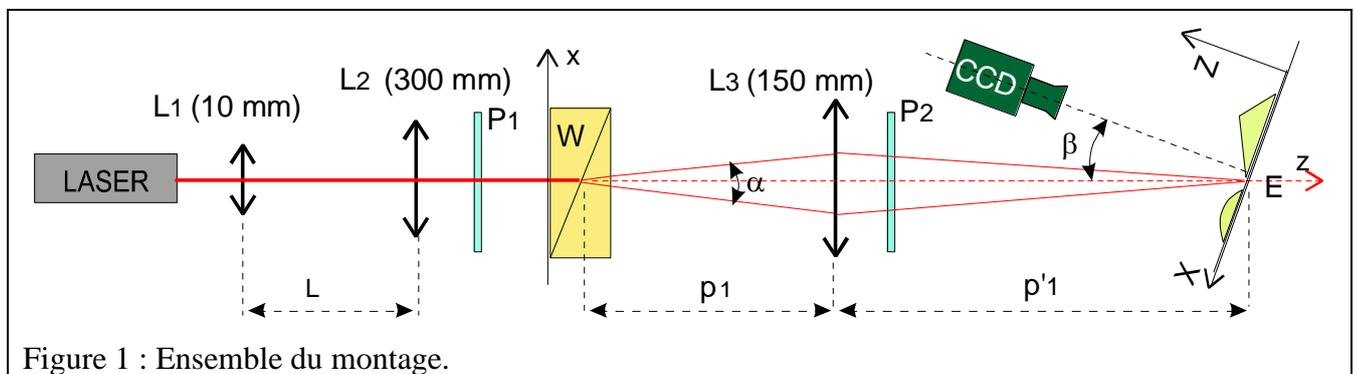
PROFILOMETRIE PAR PROJECTION DE FRANGES.

Introduction - Principes mis en œuvre

Mesurer la forme d'un objet présente beaucoup d'intérêts, aussi bien en ingénierie (topographie, contrôle de qualité) que dans d'autres secteurs d'activité (médecine ou arts). Pour caractériser la forme d'un objet, on utilise la fonction décrivant l'altitude $z = f(x,y)$ de chaque point de sa surface.

La méthode par projection de franges permet des mesures sans contact. On réalise ces franges à l'aide d'un montage interférométrique (Figure 1) utilisant un laser, des lentilles, des polariseurs et un prisme de Wollaston. On observe tout d'abord les franges avec une caméra CCD dans une direction perpendiculaire à un plan donné.

Ensuite on place l'objet à étudier sur ce plan et les franges qui y sont projetées sont déformées par le relief de l'objet. La déformation des franges permet de remonter au profil de l'objet.



L'étude qui suit est constituée de questions indépendantes.

I Élargisseur de faisceau (2,5 points)

En première approximation, on considère le faisceau sortant du laser comme cylindrique d'axe parallèle à l'axe optique de diamètre $\phi_1 = 1,00$ mm. On élargit le faisceau avec un système afocal formé de deux lentilles convergentes L_1 (10 mm) et L_2 de distances focales respectives $f_1' = 10$ mm et $f_2' = 300$ mm.

- 1) En utilisant les lois de l'optique géométrique et des lentilles minces, faire un schéma sans échelle du montage "élargisseur de faisceau" en précisant la position des foyers de chaque lentille.
- 2) Représenter sur le schéma précédent les rayons limitant le faisceau.
- 3) Donner la valeur numérique de la distance D séparant les lentilles.
- 4) Donner la valeur du diamètre du faisceau ϕ_2 en sortie de la lentille L_2 .

II Faisceaux gaussiens (5 points)

La répartition énergétique du faisceau laser de longueur d'onde λ est en réalité gaussienne (Figure 2).

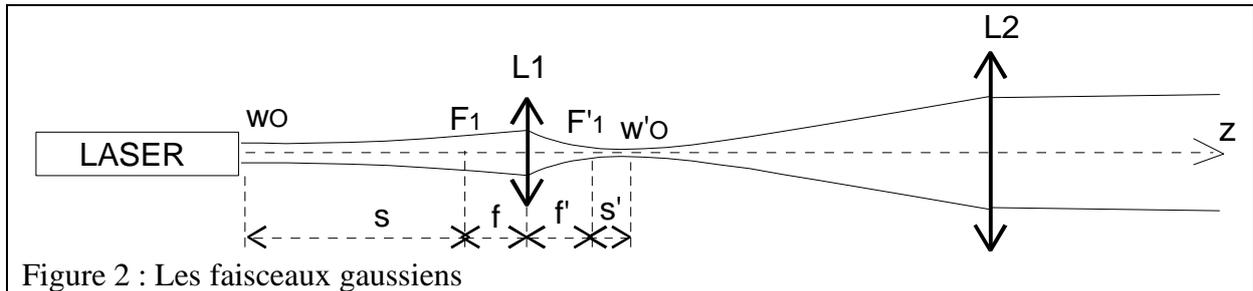


Figure 2 : Les faisceaux gaussiens

On admet que le faisceau reste cylindrique tant que la distance z d'éloignement par rapport au waist, de rayon w_0 , est inférieure à la distance de Rayleigh $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$. Dans un plan d'abscisse z , le rayon du faisceau est :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}$$

La loi de conjugaison des faisceaux gaussiens pour une lentille mince de focale f' relie la distance s du waist objet au foyer objet et la distance s' du waist image au foyer image. On obtient les relations :

$$s' = \frac{sf'^2}{s^2 + z_R^2} \text{ et :}$$

$$w_0'^2 = w_0^2 \frac{s'}{s} \text{ où } w_0' \text{ est le waist image.}$$

Données :

- longueur d'onde du laser : $\lambda = 0,633 \mu\text{m}$,
- rayon du faisceau au waist : $w_0 = 0,50 \text{ mm}$,
- distance focale de la lentille L_1 : $f_1' = 10 \text{ mm}$,
- distance entre le waist objet et la lentille L_1 : $d = 410 \text{ mm}$.

- 1) Calculer la valeur de distance de Rayleigh z_R dans l'espace objet de L_1 .
- 2) En déterminant la valeur de s' , retrouver pour le waist image w_0' une valeur de $4 \mu\text{m}$.
- 3)
 - a- Montrer que, lorsque la distance z d'éloignement par rapport au waist devient très supérieure à la distance de Rayleigh z_R , l'équation donnant le rayon du faisceau laser se simplifie en :

$$w(z) \approx w_0 \frac{z}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0} z$$

- b- En déduire que le faisceau est conique et que l'angle total d'ouverture s'écrit :

$$\theta = \frac{2\lambda}{\pi w_0}$$

- 4) On se place dans l'espace entre les deux lentilles. En admettant l'approximation faite au 3)a-toujours valable, calculer la valeur du rapport $G = \frac{w_2}{w_1}$ avec w_1 et w_2 les rayons respectivement pris sur L_1 et L_2 .

III Prisme de Wollaston (4 points)

Le faisceau laser élargi de longueur d'onde $\lambda = 0,633 \mu\text{m}$, traverse un polariseur P_1 et éclaire un prisme de Wollaston W constitué de deux demi-prismes biréfringents d'indices ordinaire $n_o = 1,5426$ et extraordinaire $n_e = 1,5517$.

Le prisme a une épaisseur e .

Les deux demi-prismes (Figure 3) ont un angle au sommet $A = 2,0^\circ$. Ils sont accolés avec des lignes neutres horizontales (Ox) et verticales (Oy) de telle sorte que la ligne ordinaire de l'un soit parallèle à la ligne extraordinaire de l'autre.

Le polariseur P_1 est orienté à 45° des lignes neutres ; une vibration rectiligne incidente sur W possède dès l'entrée deux composantes notées \uparrow et \circ , orthogonales, de même amplitude.

On considère un rayon incident en un point M tel que $OM = x$. La composante de polarisation horizontale \uparrow qui est ordinaire dans le premier demi prisme puis extraordinaire dans le second. C'est l'inverse pour la composante de polarisation verticale \circ .

On obtient en sortie du prisme W deux rayons de polarisation \uparrow et \circ formant entre eux un angle α de valeur numérique : $\alpha = 0,636 \text{ mrad}$.

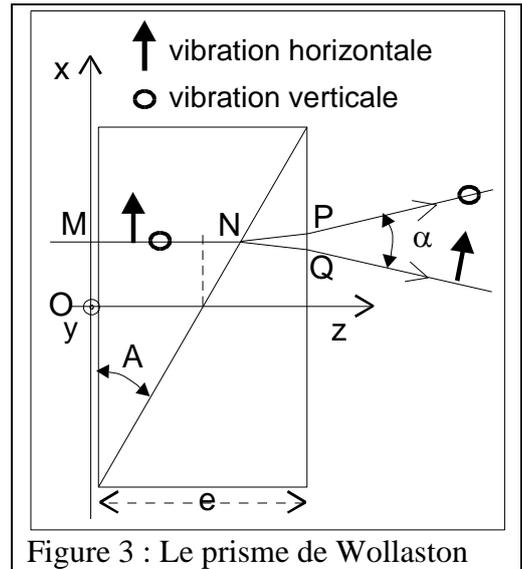


Figure 3 : Le prisme de Wollaston

- 1) Pour justifier la direction NQ prise par la vibration de polarisation horizontale \uparrow , compléter la construction d'Huygens **schéma N°1, sur l'annexe à rendre avec la copie**.
- 2) L'angle de séparation des faisceaux est si faible qu'on supposera P et Q confondus dans le prolongement de MN . On montre alors que le chemin optique du rayon de polarisation horizontale \uparrow entre M et Q est peu différent de : $(MQ) \approx (n_e + n_o)e/2 - (n_e - n_o).x.\tan(A)$. Calculer de même le chemin optique (MP) du rayon de polarisation verticale \circ .
- 3) On appelle x_i l'ordonnée du point M pour laquelle la différence de marche est égale à λ . On admet que la différence de marche peut s'écrire : $\delta = \alpha x_i$.

a- Montrer que la différence de phase peut s'écrire $\varphi = \frac{2\pi x}{x_i}$.

b- Calculer numériquement x_i en mm.

IV Interférences en lumière polarisée et décalage de phase (4 points)

Formulaire mathématique :

$$\cos a = \frac{e^{ja} + e^{-ja}}{2}$$

$$\cos(a + \pi/2) = -\sin(a)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin(a + \pi/2) = \cos(a)$$

$$\cos(2a) = 2 \cdot \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2 a$$

- 1) Expliquer sans calcul pourquoi un second polariseur P_2 (Figure 1) permet l'interférence des deux faisceaux dans le plan donné.

- 2) On appelle a_0 l'amplitude de la vibration qui émerge de P_1 et $I_0 = a_0^2$ son intensité.
- a- Compléter le **schéma N°2 sur l'annexe à rendre avec la copie**.
- b- Montrer qu'en sortie de P_2 on a deux vibrations de même amplitude $a_0/2$ et déphasées de φ .
- 3)
- a- Donner l'expression de l'amplitude des deux vibrations précédentes (on utilisera la forme trigonométrique ou la forme complexe).
- b- Déterminer l'expression de l'intensité résultant de l'interférence des deux ondes.
- 4) Pour le rayon incident en M (d'abscisse x), l'intensité dans le plan passant par E et perpendiculaire à Oz est donnée par $I = I_{MOY} (1 + m \cos(\varphi))$ avec la différence de phase $\varphi = \frac{2\pi x}{x_i}$.

On déplace successivement le prisme de Wollaston des distances $x_i/4$; puis $x_i/2$; puis $3x_i/4$ le long de l'axe Ox.

Montrer que les intensités deviennent respectivement :

$$I_1 = I_{MOY} \left(1 + m \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \right); I_2 = I_{MOY} (1 + m \cos(\varphi + \pi)); I_3 = I_{MOY} \left(1 + m \cos\left(\varphi + \frac{3\pi}{2}\right) \right)$$

5)

- a- Calculer le rapport $T = \frac{I_3 - I_1}{I - I_2}$ en fonction de φ .
- b- En déduire une expression de φ en fonction de T.

V Projection des franges (3 points)

- 1) On fait l'image des franges avec une lentille L_3 (Figure 1) de focale $f_3' = 150$ mm sur un écran de référence perpendiculaire à l'axe Oz. On souhaite un grandissement transversal $G_T = -3$.

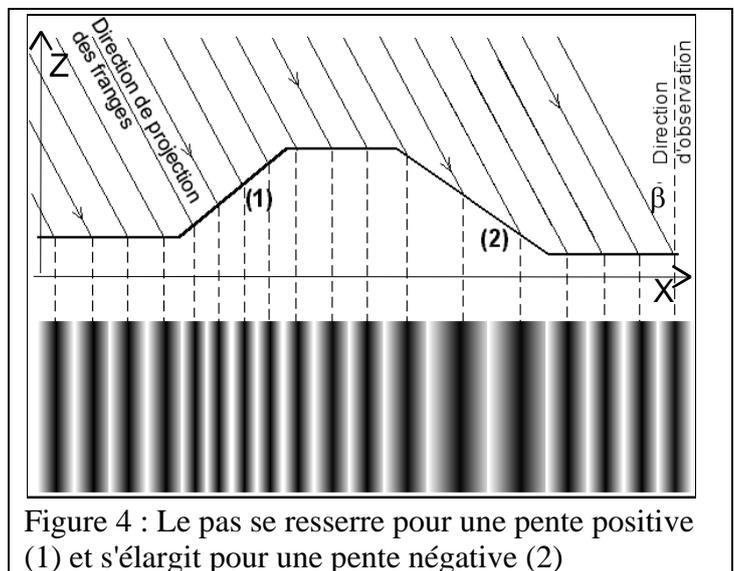
Calculer les grandeurs algébriques p_3 et p_3' .

- 2) Ce grandissement permet d'obtenir des franges rectilignes de pas $P = 3,00$ mm dans le plan perpendiculaire à l'axe Oz.

On incline l'écran de référence d'un angle $\beta = 28^\circ$ par rapport à sa position initiale. On admet que G_T reste le même.

- a- Calculer le pas P_β des franges projetées sur la surface de l'écran pour cet angle d'inclinaison β .
- b- Soit X l'abscisse d'un point de l'écran dans le repère de l'écran incliné (Figure 1). Expliquer pourquoi on a l'égalité :

$$\frac{2\pi x}{x_i} = \frac{2\pi X}{P_\beta}$$



3) On fixe sur l'écran un objet. L'altitude Z de chaque point de l'objet est comptée par rapport à l'écran. On constate que les franges précédentes apparaissent déformées. Le pas dépend maintenant de l'altitude des points (Figure 4).

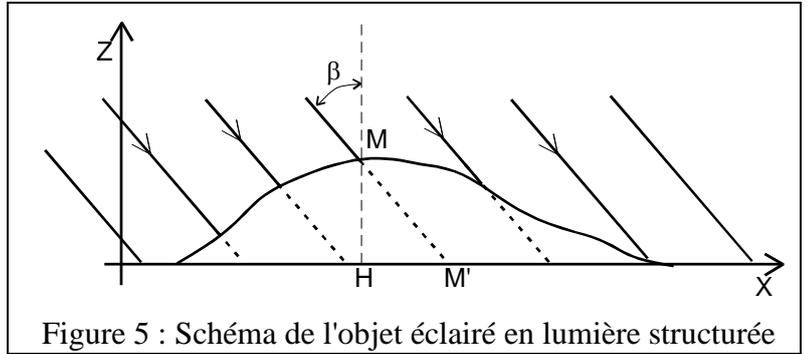


Figure 5 : Schéma de l'objet éclairé en lumière structurée

a- Montrer, en considérant la figure 5, que le point M sur l'objet d'abscisse X et d'altitude Z aura le même éclairement qu'un point M' sur l'écran de référence d'abscisse X' .

b- Calculer X' en fonction de l'altitude Z et de l'angle β .

VI Images phasées et leur lien avec le profil (2 points)

La caméra prend une première image de l'écran éclairé par les franges. Il n'y a pas d'objet. L'éclairement de chaque point s'exprime par :

$$I_{\text{REF}} = I_{\text{MOY}} \left(1 + m \cos\left(\frac{2\pi X}{P_\beta}\right) \right).$$

La caméra prend ensuite une deuxième image avec l'objet éclairé par les franges :

$$I_{\text{OBJ}} = I_{\text{MOY}} \left(1 + m \cos\left(\frac{2\pi(X + Z \tan(\beta))}{P_\beta}\right) \right)$$

On note la phase en chaque point de l'image de référence par $\varphi_{\text{REF}} = \frac{2\pi X}{P_\beta}$ et la phase sur l'image

avec l'objet par $\varphi_{\text{OBJ}} = \frac{2\pi(X + Z \tan(\beta))}{P_\beta}$.

1) Montrer que la différence $\varphi_{\text{OBJ}} - \varphi_{\text{REF}}$ permet de retrouver l'altitude Z de chaque point.

2) On utilise la méthode des 4 images (par décalage de phase de $\pi/2$; π ; $3\pi/2$). Pour obtenir φ_{REF}

en tout point on utilisera : $\varphi_{\text{REF}} = \arctan\left[\frac{I_3 - I_1}{I - I_2}\right]$

A.N : Les éclairement sont donnés en niveaux de gris : $I = 229$; $I_1 = 52$; $I_2 = 24$; $I_3 = 201$.

a- Calculer φ_{REF} .

b- Y a-t-il une solution unique ?

Annexe à joindre avec la copie

