



**LE RÉSEAU DE CRÉATION  
ET D'ACCOMPAGNEMENT PÉDAGOGIQUES**

**Ce document a été mis en ligne par le Canopé de l'académie de Bordeaux  
pour la Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel.**

Ce fichier numérique ne peut être reproduit, représenté, adapté ou traduit sans autorisation.

# BTS GÉOMÈTRE TOPOGRAPHE

## MATHÉMATIQUES

SESSION 2014

Durée : 2 Heures

Coefficient : 2

### Matériel autorisé :

Toutes calculatrices de poche y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante (Circulaire n°99-186, 16/11/1999).

### Documents à rendre avec la copie :

- Annexe 1 ..... page 5/6
- Annexe 2 ..... page 6/6

*Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.*

*Le sujet se compose de 6 pages, numérotées de 1/6 à 6/6.*

*Un formulaire de 4 pages est joint au sujet.*

BTS Géomètre Topographe		Session 2014
Mathématiques	GTMAT	Page : 1/6

### **Exercice 1 (9 points)**

Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan, on considère la courbe  $\mathcal{C}$  définie par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \cos(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases} \text{ où } t \in \mathbf{R}.$$

On note  $M(t)$  le point de paramètre  $t$ .

#### **1. Réduction de l'intervalle d'étude**

- Montrer que l'on obtient toute la courbe  $\mathcal{C}$  pour  $t$  décrivant l'intervalle  $I_0 = [-\pi; \pi]$ .
- Que peut-on dire de  $M(t)$  et  $M(-t)$  ? Proposer un intervalle d'étude  $I_1$  inclus dans  $I_0$ .
- Que peut-on dire de  $M(t)$  et  $M(\pi - t)$  ? Proposer un intervalle d'étude  $I_2$  inclus dans  $I_1$ .

#### **2. Tracé de la courbe**

On étudie la courbe pour  $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$ .

- Etudier le signe des fonctions  $x'$  et  $y'$  dérivées respectives des fonctions  $x$  et  $y$  pour  $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$ .

Compléter le tableau des variations conjointes de ces fonctions donné en annexe.

- On note A, B, C et D les points de paramètres respectifs  $0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}$ .

Compléter par des valeurs exactes le tableau donné en annexe.

- Placer les points A, B, C et D dans le repère donné en annexe.

En admettant que la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point D est dirigée par le vecteur de coordonnées  $(4; 9)$ , représenter les tangentes à la courbe  $\mathcal{C}$  aux points A, B et D.

- On admet que les dérivées secondes des fonctions  $x$  et  $y$  sont données par :

$$\begin{cases} x''(t) = -4 \cos(2t) \\ y''(t) = -9 \sin(3t) \end{cases}$$

Montrer que le rayon de courbure de  $\mathcal{C}$  au point B de paramètre  $\frac{\pi}{6}$  est égal à  $\frac{1}{3}$ .

On rappelle que le rayon de courbure est donné par la formule :

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - x''y'}.$$

- Tracer le cercle osculateur à la courbe au point B puis tracer la courbe complète dans le repère fourni en annexe.

**Exercice 2 (11 points)** Les parties I et II sont indépendantes.

**Partie I**

Cette partie propose un questionnaire à choix multiples (QCM).

Pour chacune des questions, une seule réponse est exacte. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse juste rapporte 1 point, une réponse fautive ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie.

A. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère la courbe  $\Gamma$  d'équations paramétriques :  $\begin{cases} x(t) = 2 \cos(t) \\ y(t) = 3 \sin(t) \end{cases}$  avec  $t \in \mathbf{R}$ .

La courbe  $\Gamma$  est :

- a) un cercle                      b) une ellipse                      c) une parabole                      d) une autre courbe

B. L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soient les vecteurs  $\vec{u}(1 ; 1 ; 1)$  et  $\vec{v}(1 ; 1 ; 3)$ .

**B.1.** Le produit scalaire de  $\vec{u}$  par  $\vec{v}$  est égal à :

- a)  $-1$                       b)  $\vec{v}$                       c)  $5$                       d)  $\vec{w}(2 ; -2 ; 0)$

**B.2.** On considère la droite  $D_1$  définie par le point  $I(1 ; 0 ; 0)$  et le vecteur  $\vec{u}$  ainsi que la droite  $D_2$  définie par le point  $J(0 ; 1 ; 0)$  et le vecteur  $\vec{v}$ . Ces deux droites sont :

- a) parallèles                      b) sécantes                      c) orthogonales                      d) non coplanaires et non orthogonales

**B.3.** Le plan  $P$  passant par le point  $A(2 ; 0 ; 1)$  et dirigé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , a pour équation cartésienne :

- a)  $x - 2z = 0$                       b)  $x + y - 2 = 0$                       c)  $z = 1$                       d)  $x - y - 2 = 0$

**Partie II**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On rappelle que tout point  $M$  d'une sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$  est repéré par le triplet  $(r ; \theta ; \varphi)$  où  $r = OM$ ,  $\theta$  est la longitude du point et  $\varphi$  est sa latitude (en radians).

Soit  $I$  l'inversion de pôle  $N(0 ; 0 ; 1)$  et de rapport  $8$ .

On considère le plan  $P$  défini par le point  $A(0 ; 0 ; -3)$  de vecteur normal  $\vec{k}$ .

1. Déterminer une équation cartésienne du plan  $P$ .

2. a) Justifier que l'image du plan  $P$  par l'inversion  $I$ , est la sphère  $\Sigma$  de centre  $O$  et de rayon  $1$  privée du point  $N$ .

b) Déterminer une équation cartésienne de la sphère  $\Sigma$ .

3. Soit le point  $B$  de coordonnées  $(2\sqrt{3} ; 2 ; -3)$

a) Justifier que  $B$  appartient au plan  $P$ .

b) Déterminer les coordonnées cartésiennes du point  $B'$ , image du point  $B$  par l'inversion  $I$ .

c) Montrer que les coordonnées sphériques du point  $B'$  sont  $(1 ; \frac{\pi}{6} ; 0)$ .

4. Compléter la figure donnée en annexe en plaçant les points  $N$ ,  $A$  et  $B'$  sur la sphère  $\Sigma$ , le point  $A'$  image de  $A$  par l'inversion  $I$  et le point  $C'$  dont les coordonnées sphériques sont  $(1 ; \frac{\pi}{2} ; 0)$ .

Enfin, placer le point  $B$  en laissant apparents les traits de construction.

5. a) Donner les caractéristiques du triangle sphérique  $A'B'C'$  (on utilisera les notations usuelles).  
b) Déterminer son aire.

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel  
Réseau CANOPE

**Annexe 1 : à rendre avec la copie.**

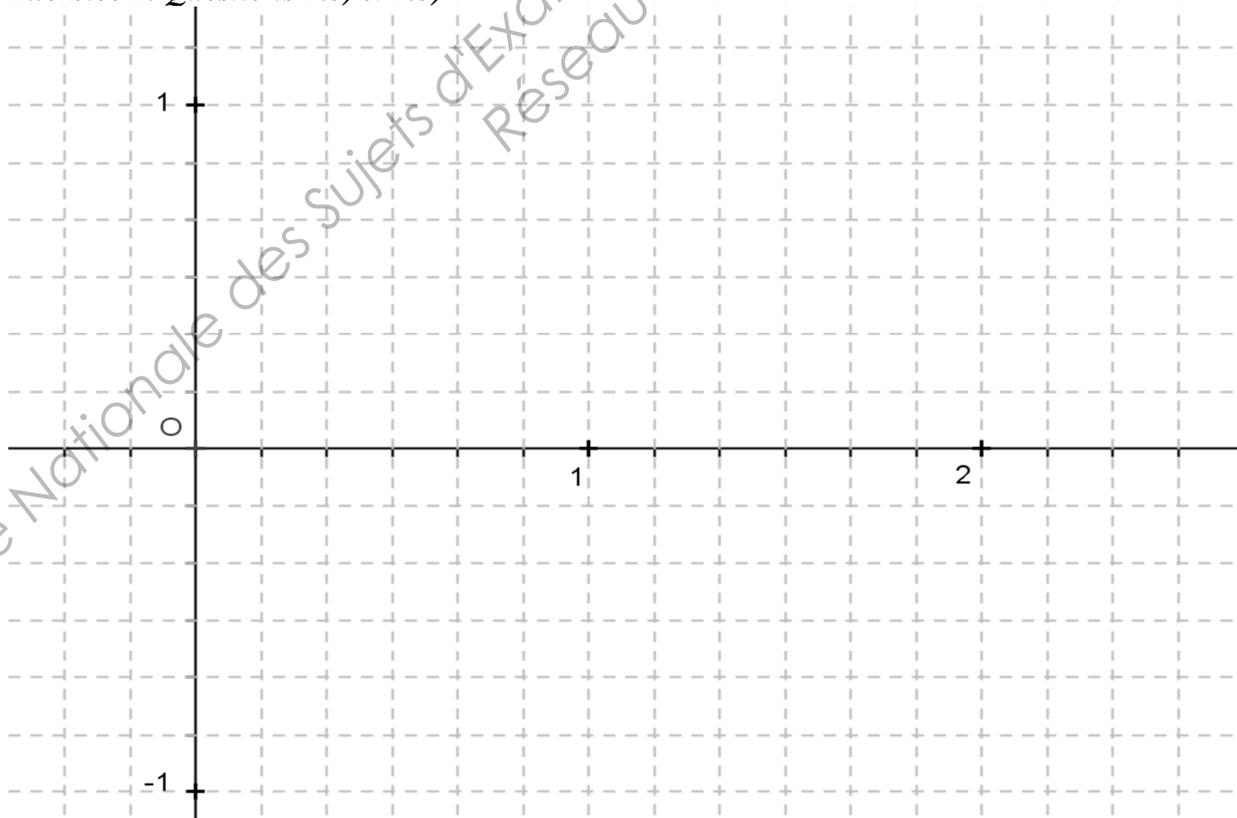
**Exercice 1. Question 2.a)**

$t$	
Signe de $x'(t)$	
$x(t)$	
$y(t)$	
Signe de $y'(t)$	

**Exercice 1. Question 2.b)**

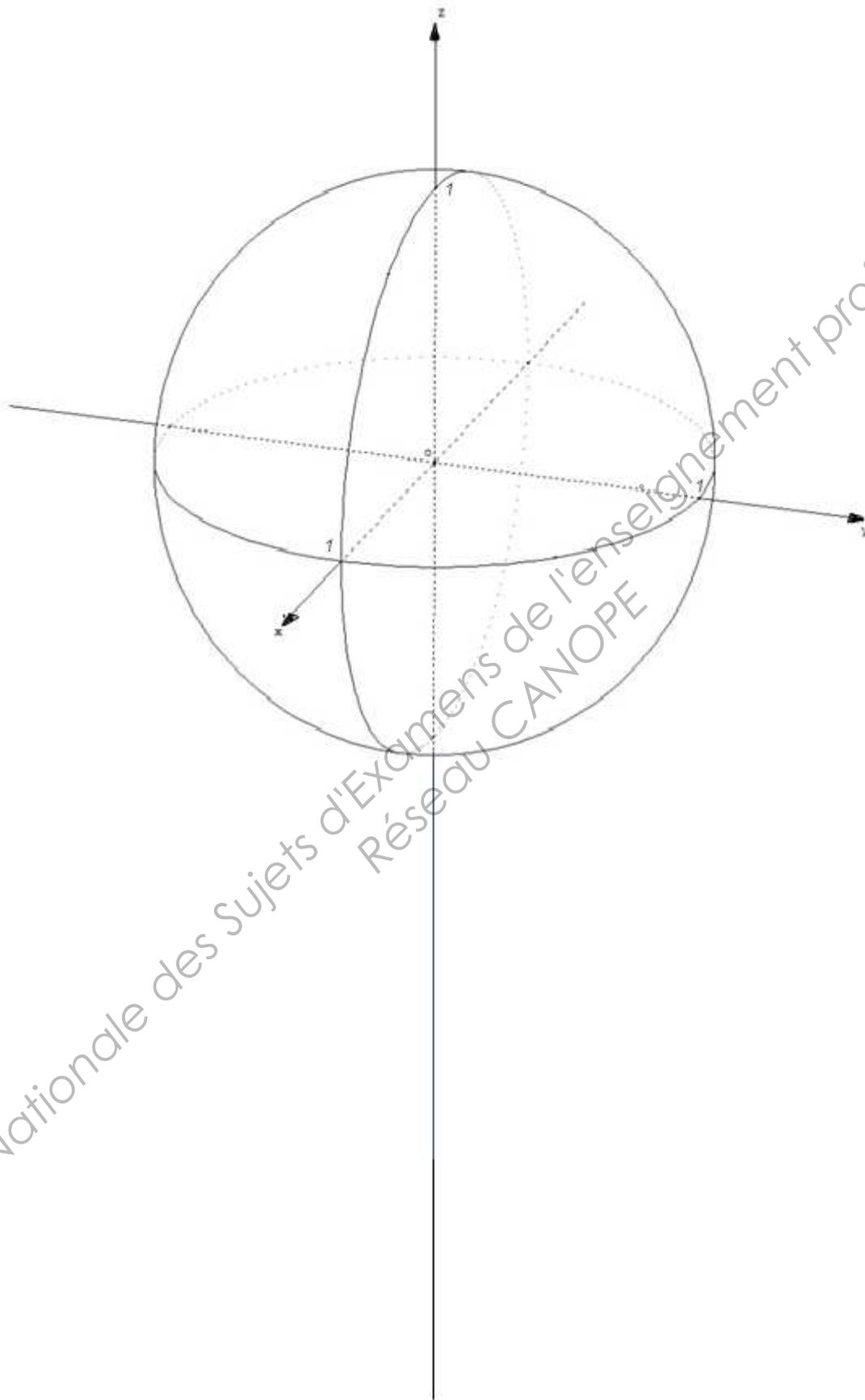
	A	B	C	D
Paramètre	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$				
$x(t)$				
$y(t)$				
$y'(t)$				

**Exercice 1. Questions 2.c) et 2.e)**



Annexe 2 : à rendre avec la copie.

Exercice 2. Question B 4.



Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel  
Réseau CANOPE