



SERVICES CULTURE ÉDITIONS
RESSOURCES POUR
L'ÉDUCATION NATIONALE

**Ce document a été numérisé par le CRDP de Bordeaux pour la
Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel.**

Campagne 2013

GÉOMÈTRE TOPOGRAPHE

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

MATHÉMATIQUES

SESSION 2013

Durée : 2 heures

Coefficient : 2

Matériel autorisé :

Toutes les calculatrices de poche y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante (Cirulaire n°99-186, 16/11/1999)

Documents à rendre avec la copie :

Annexe 1 page 4
Annexe 2 page 5

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet se compose de 5 pages, numérotées de 1/5 à 5/5.

Un formulaire de 4 pages est joint au sujet.

BTS Géomètre Topographe		Session 2013
Mathématiques	GTMAT	Page 1/5

Exercice 1 (9 points) : courbe plane

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ représenté en annexe 1 page 4.

On considère la courbe C , d'équation polaire $r(\theta) = 4 \sin \theta \cos^2 \theta$ où $\theta \in \mathbf{R}$.

On note M_θ le point de C de coordonnées polaires $(r ; \theta)$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés de la courbe C et de la tracer.

A. Détermination de l'intervalle d'étude

1. Montrer que r est une fonction périodique de période 2π .

2. Étudier la parité de la fonction r .

Que peut-on en conclure pour les points M_θ et $M_{-\theta}$ de la courbe C ?

3. Dédurre des deux questions précédentes que l'intervalle d'étude de r peut être réduit à $[0 ; \pi]$ et donner une propriété géométrique de la courbe C .

4. Comparer $r(\pi - \theta)$ et $r(\theta)$.

Que peut-on en conclure pour les points M_θ et $M_{\pi - \theta}$ de la courbe C ?

En déduire que l'étude de la fonction r peut être réduite à l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

B. Étude et tracé de la courbe C .

1. On note r' la fonction dérivée de la fonction r . Montrer que $r'(\theta) = 4 \cos \theta (1 - 3 \sin^2 \theta)$.

2. Étudier le signe de la fonction r' pour tout réel θ de l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

Dresser le tableau des variations de la fonction r sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Compléter le tableau de valeurs de l'annexe 1 page 4 avec des valeurs exactes.

4. Justifier que la tangente à la courbe C au point M_0 est l'axe (Ox) .

On admettra qu'aux points $M_{\pi/6}$ et $M_{\pi/2}$ la tangente à la courbe C est « verticale » et qu'au point $M_{\pi/4}$ elle est « horizontale ».

5. Placer les points M_0 , $M_{\pi/6}$, $M_{\pi/4}$ et $M_{\pi/2}$ sur le repère de l'annexe 1 page 4.

Tracer les tangentes à la courbe C en ces quatre points.

6. Montrer que le rayon de courbure de la courbe C au point M_0 est 2.

On admettra que $r''(\theta) = 4 \sin \theta (2 - 9 \cos^2 \theta)$ et pour rappel : $R = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'r'' - rr''}$.

Donner les coordonnées cartésiennes du centre du cercle osculateur à la courbe C au point M_0 .

7. Tracer le cercle osculateur à la courbe C au point M_0 .

Tracer la courbe C .

BTS Géomètre Topographe		Session 2013
Mathématiques	GTMAT	Page 2/5

Exercice 2 (11 points) : géométrie sphérique.

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la Terre est assimilée à une sphère Σ de centre O et de rayon 1.

Tout point de Σ est alors repéré par le couple $(\theta ; \varphi)$ où θ est sa longitude et φ sa latitude (en radians).

Soient les points $N\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$; $S\left(0 ; -\frac{\pi}{2}\right)$; $A\left(-\frac{\pi}{2} ; 0\right)$; $B\left(\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{4}\right)$; $C\left(0 ; \frac{\pi}{3}\right)$ et $D\left(\frac{\pi}{2} ; 0\right)$.

A. Trigonométrie sphérique

1. a) Placer les points N, S, A, B, C et D sur la figure de l'annexe 2 page 5.

b) Tracer le triangle sphérique NBC.

2. a) Donner les coordonnées cartésiennes des points N, S, A et D.

b) Déterminer les coordonnées cartésiennes des points B et C.

3. Déterminer les six éléments du triangle sphérique NBC. Donner les valeurs exactes et ensuite les valeurs approchées en arrondissant à 10^{-2} .

B. Projection stéréographique de pôle A

On note I l'inversion de pôle A et de puissance 2.

1. a) Justifier que les points N, C et S sont des points invariants par I .

b) Déterminer les coordonnées cartésiennes de l'image du point D par I .

On admettra que B' image du point B par I a pour coordonnées $(0 ; 0 ; \sqrt{2} - 1)$.

2. Déterminer l'image de la sphère Σ privée du point A par I . Justifier votre réponse.

L'objectif des deux questions suivantes est de représenter les images par I des deux triangles sphériques NDC et NBC.

3. a) Quelle est l'image par I du grand cercle Γ_1 privé du point A passant par N et D ? Justifier votre réponse.

b) Quelle est l'image par I du grand cercle Γ_2 privé du point A passant par C et D ? Justifier votre réponse.

c) Quelle est l'image par I du grand cercle Γ_3 passant par C et N ? Justifier votre réponse.

d) Tracer sur le repère de l'annexe 2 page 5 l'image du triangle sphérique NDC.

4. a) Quelle est la nature de l'image par I du grand cercle Γ_4 passant par B et C ? Justifier votre réponse.

b) En remarquant que le point C_1 diamétralement opposé au point C est invariant par I , construire l'image de l'arc \widehat{BC} dans le repère de l'annexe 2 page 5.

Laisser apparents les traits de construction et surligner d'une couleur différente de celle utilisée dans la question 3.d) les contours de l'image du triangle sphérique NBC.

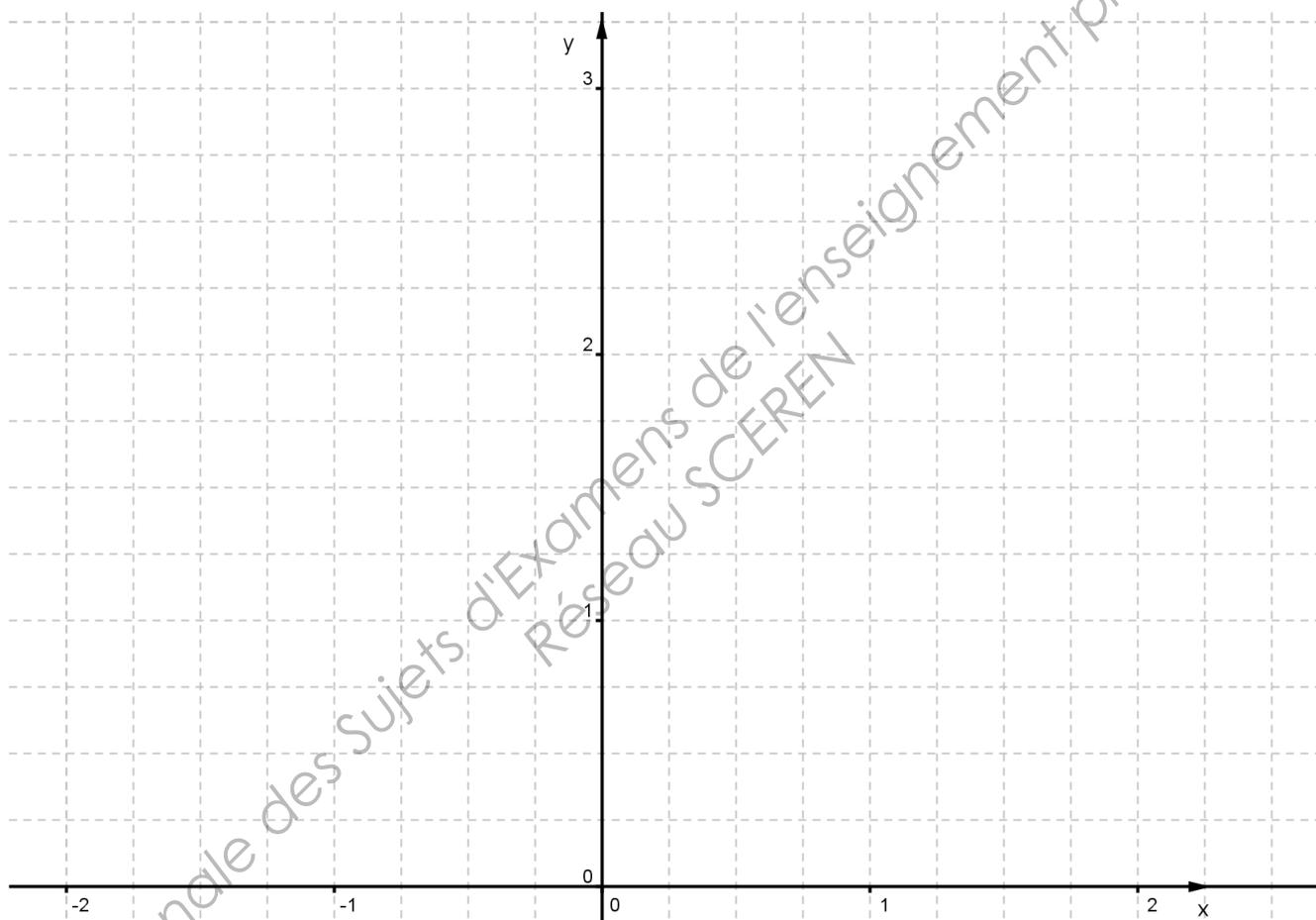
BTS Géomètre Topographe		Session 2013
Mathématiques	GTMAT	Page 3/5

ANNEXE 1 (à rendre avec la copie)

Exercice 1. Question B.3

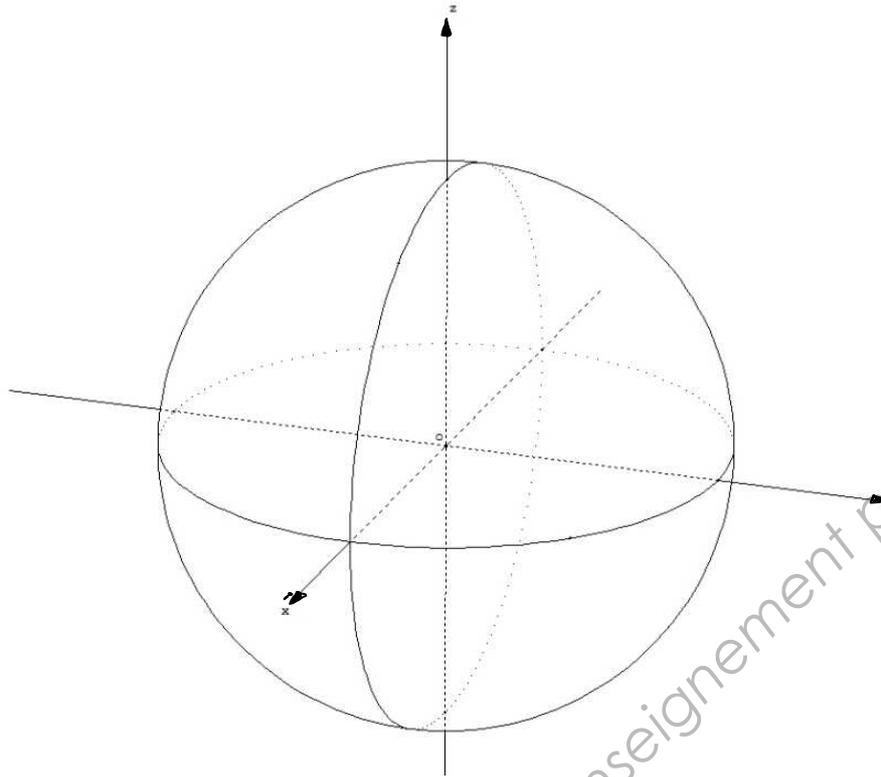
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
r				
r'				

Exercice 1. Questions B.5 et B.7

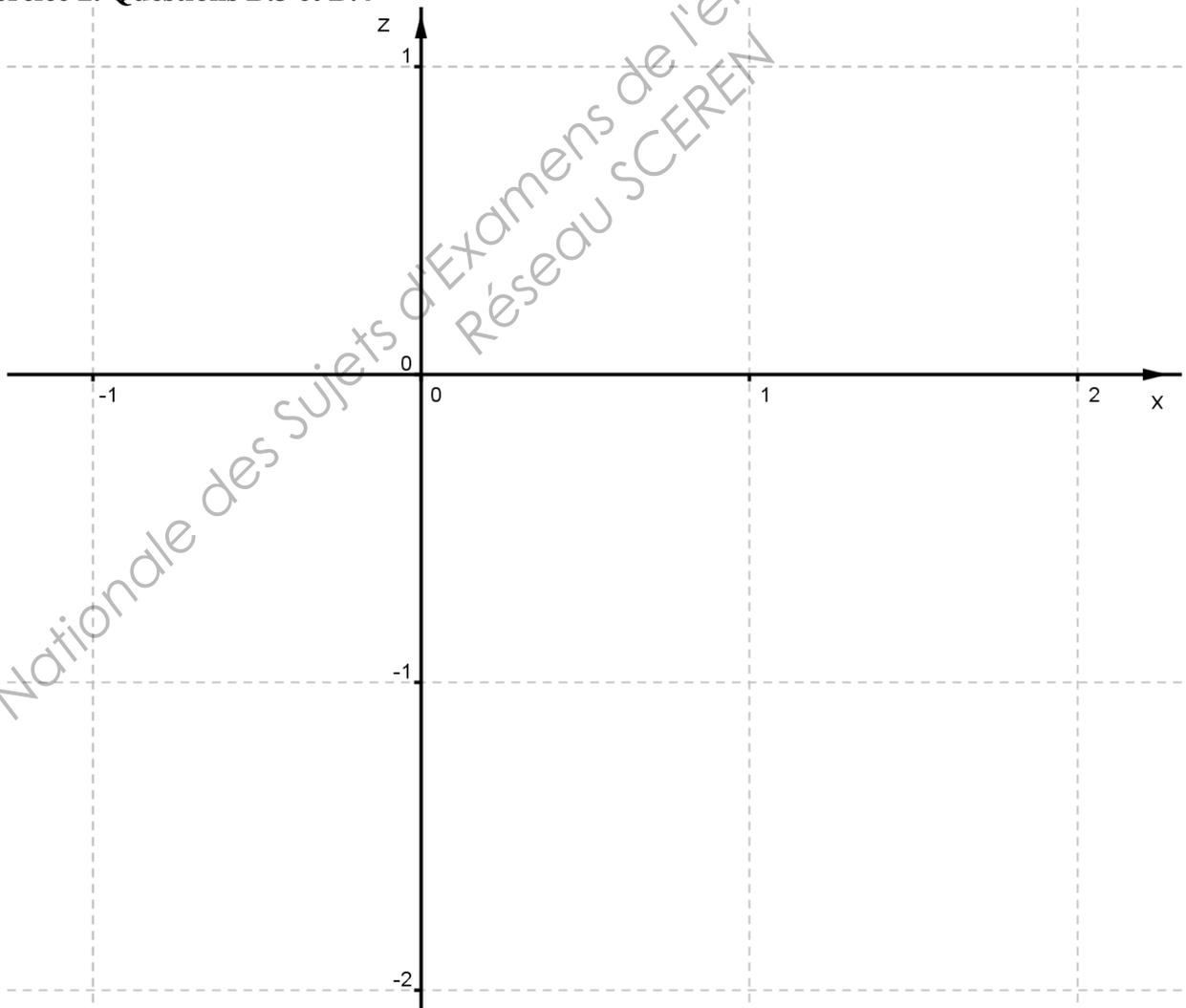


ANNEXE 2 (à rendre avec la copie)

Exercice 2. Question A.1



Exercice 2. Questions B.3 et B.4



FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

BTS GEOMETRE-TOPOGRAPHE

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$$

$$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it}),$$

$$\sin t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it})$$

$$e^{a+ib} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)), \text{ où } a = \alpha + i\beta$$

2. CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 ;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0$$

Croissances comparées à l'infini

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0 ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \ln t = 0.$$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	Arc sin t	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	Arc tan t	$\frac{1}{1+t^2}$
t^α ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$\alpha t^{\alpha-1}$	e^{at} ($a \in \mathbb{C}$)	ae^{at}
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = k u'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + t^n \epsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + t^n \epsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \epsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \epsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \epsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + t^n \epsilon(t)$$

3. TRIGONOMETRIE SPHERIQUE

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

$$\text{aire}(ABC) = (A + B + C - \pi) R^2$$

4. PROBABILITES

a) Loi binomiale $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

$k \backslash \lambda$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

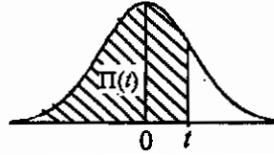
$k \backslash \lambda$	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0.000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0.000	0.001
22											0.000

c) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$