BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

GÉOMÈTRE/TOPOGRAPHE

SESSION 2004

MATHÉMATIQUES

Durée : 2 h **Coefficient : 2**

- SUJET -

Le sujet comporte deux exercices indépendants
qui seront traités sur des copies séparées.
L'annexe est à rendre avec la copie.

Dès remise du sujet, assurez-vous qu'il est complet.

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice I (10 points)

Le but de cet exercice est l'étude d'une courbe plane, appelée lemniscate, que l'on peut rencontrer lors de l'élaboration de certains raccordements routiers.

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ (unité 5 cm). On note C la courbe définie en coordonnées polaires par :

$$r = f(\theta) = \sqrt{\sin(2\theta)} \quad \text{pour} \quad \theta \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi\,;\,\frac{3\pi}{2}\right].$$

1°) Soit θ un réel de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

a) A quel intervalle $\theta + \pi$ appartient-il ?

b) Calculer $f(\theta + \pi)$ en fonction de $f(\theta)$; en déduire une propriété de symétrie de la courbe C.

2°) Soit θ un réel de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$.

a) A quel intervalle $\frac{\pi}{2} - \theta$ appartient-il ?

b) Calculer $f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ en fonction de $f(\theta)$; en déduire une propriété de symétrie de la courbe C.

3°) Soit C_1 l'arc de courbe obtenu pour $\theta \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$. Comment obtient-on C à partir de C_1 ?

4°) Montrer que pour tout θ appartenant à $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$, $r' = f'(\theta) = \dfrac{\cos 2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}$.

5°) Étudier le signe de $f'(\theta)$ sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$. En déduire les variations de f pour $\theta \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$, puis dresser le tableau de variations de f sur ce dernier intervalle.

6°) On pose, pour tout $\theta \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$, $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Montrer que :

$$x' = \frac{\cos 3\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}} \quad \text{et} \quad y' = \frac{\sin 3\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}.$$

7°) Déterminer un vecteur directeur de chacune des deux tangentes suivantes à la courbe C, l'une au point A de paramètre $\theta = \frac{\pi}{6}$ et l'autre au point B de paramètre $\theta = \frac{\pi}{4}$.

8°) Calculer $\displaystyle\lim_{\theta \mapsto 0} \frac{y'}{x'}$. On admet que cette limite est le coefficient directeur de la tangente à C au point O. Caractériser la tangente à C au point O.

9°) Tracer soigneusement la courbe C, ainsi que les tangentes aux points O, A, B.

10°) On admet que le rayon de courbure au point B vaut $\frac{1}{3}$. Déterminer un vecteur directeur $\vec{n}$ de la normale au point B. Sur la même figure, construire le cercle de courbure en B.

Exercice II (10 points)

L'espace est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$. Les axes de coordonnées sont les axes (Ox), (Oy) et (Oz). Les plans de coordonnées sont les plans (Oxy), (Oxz) et (Oyz). La notation $M(x,\,y,\,z)$ désigne le point M de coordonnées x, y et z.

La figure sera construite et complétée sur l'annexe au fur et à mesure de l'avancement des questions.

Soit Δ la droite incluse dans le plan (Oyz), d'équations $\begin{cases} x = 0 \\ 12y - 5z = 0 \end{cases}$

Soit Σ la sphère de centre $\Omega(0,\,3,\,2)$, tangente en $T(0,\,3,\,0)$ au plan (Oxy).

1°) a) Montrer que la sphère Σ a pour équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 4z + 9 = 0$.

b) Montrer que la droite Δ et la sphère Σ ont pour unique point commun $A\left(0,\,\dfrac{15}{13},\,\dfrac{36}{13}\right)$.
En déduire la position de la droite Δ par rapport à la sphère Σ.

2°) Soit P le plan perpendiculaire au point A à la droite Δ.

a) Montrer que P a pour équation $5y + 12z - 39 = 0$.

b) On note Δ_1, Δ_2, Δ_3 les droites intersections respectives de P avec les plans (Oyz), (Oxz) et (Oxy). Déduire de la question a) un système d'équations cartésiennes de chacune des droites Δ_1, Δ_2, Δ_3.

c) Compléter la figure donnée en annexe. En particulier, on reconnaîtra et on nommera les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3.

3°) Soit B le point de la sphère Σ, diamétralement opposé à T.
On note T' le point de coordonnées $(3,\,0,\,0)$

a) Déterminer les coordonnées de B et placer ce point sur la figure en annexe.

b) Écrire une équation du plan P' déterminé par les droites TB et TT'.

c) Montrer que les plans P et P' sont sécants suivant une droite D d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 12t \\ y = -12t + 3 \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 5t + 2. \end{cases}$$

d) Déterminer les coordonnées du point I, intersection de D avec le plan (Oxz).

4°) Soit Γ_1 le grand cercle intersection du plan P et de la sphère Σ. Soit Γ_2 le grand cercle intersection du plan P' et de la sphère Σ. Les deux grands cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en deux points. On note C le point d'abscisse positive.On obtient ainsi un triangle sphérique ABC tracé sur la sphère Σ

a) Compléter la figure donnée en annexe ; reconnaître et nommer Γ_1 et Γ_2.

Avec les notations habituelles, on rappelle les « formules fondamentales » :

$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \hat{A} \\ \cos \hat{A} = -\cos \hat{B} \cos \hat{C} + \sin \hat{B} \sin \hat{C} \cos a \end{cases}$$

b) Montrer que le triangle sphérique ABC est rectangle en A. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\Omega A} \,.\, \overrightarrow{\Omega B}$. En déduire une valeur approchée de la mesure en degrés de l'angle géométrique $\widehat{A\Omega B}$.

c) Nommer deux plans de la figure déterminant l'angle $\hat{B}$ du triangle sphérique ABC.

d) En déduire que sa mesure est 45°. Calculer des valeurs approchées de $\hat{C}$, b, a.

Figure de l'exercice 2