BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE S.T.I.

Génie électronique – Génie électrotechnique – Génie optique

SESSION 2010

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée 4 heures

LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT
LES DEUX EXERCICES ET LE PROBLÈME

* * * *

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation des calculatrices électroniques, programmables, alphanumériques ou à écran graphique **est autorisée**, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit fait usage d'aucune imprimante.
Chaque candidat ne peut utiliser qu'une seule machine sur sa table.
En cas de défaillance, elle pourra cependant être remplacée.
Cependant, les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que l'échange d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits.
(circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999)

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

Une feuille de papier millimétré sera distribuée en même temps que le sujet.

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Soit $P(z)=z^3-27$, où z désigne un nombre complexe.

a) Vérifier que $P(z)=(z-3)(z^2+3z+9)$.

b) Résoudre, dans l'ensemble **C** des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}}=3,\quad z_{\mathrm{B}}=-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\quad \text{et}\quad z_{\mathrm{C}}=-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\,.$$

a) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_{B} et z_{C}.

b) Écrire le nombre complexe z_{C} sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.

c) Justifier que les points A, B et C sont sur un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.

d) Placer les points A, B et C dans le plan muni du repère $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$.

3. Le point D est l'image du point C par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. On appelle z_{D} l'affixe du point D.

Montrer que $z_{\mathrm{D}}=-3$, puis placer le point D sur la figure précédente.

4. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité : $|z+3|=3$.

a) Vérifier que les points O, B et C appartiennent à l'ensemble $\mathscr{F}$.

b) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

L'ensemble $\mathscr{F}$ est l'image du cercle Γ par certaines transformations du plan.

En citer une et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 2 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est correcte.
Chaque bonne réponse rapporte 1 point et chaque mauvaise réponse enlève 0,5 point. Une absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.
On notera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie.

Partie A

Deux machines A et B produisent un même type de pièce. On a prélevé 3000 unités sortant de la machine A et 2000 de la machine B.
Ces pièces peuvent présenter deux types de défauts : un défaut de couleur, noté C, et un défaut de taille, noté T.
Pour la machine A, 2 % des pièces présentent uniquement le défaut C, 5 % uniquement le défaut T et 1 % les deux défauts.
Pour la machine B, 3 % présentent le seul défaut C, 4 % le seul défaut T et 2 % les deux défauts.

On pourra éventuellement se servir du tableau ci-dessous.

	C seul	T seul	C et T	ni C ni T	**Total**
A	60	150	30	2760	3000
B	60	80	40	1820	2000
Total	120	230	70	4580	5000

On prend au hasard une pièce parmi les 5000 prélevées ; toutes les pièces ont la même chance d'être choisies.

1. La probabilité que la pièce soit fabriquée par la machine A est :

   a) $\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{3}{5}$ **c)** $\frac{3}{2}$ **d)** $\frac{2}{5}$

2. La probabilité que la pièce présente uniquement le défaut C est :

   a) 0,024 **b)** 0,02 **c)** 0,03 **d)** 120

3. La probabilité que la pièce présente le défaut T est :

   a) $\frac{23}{500}$ **b)** $\frac{3}{50}$ **c)** $\frac{7}{500}$ **d)** $\frac{1}{20}$

4. La probabilité que la pièce présente au moins l'un des deux défauts est :

   a) 0,014 **b)** 0,06 **c)** 0,038 **d)** 0,084

Partie B

L'entreprise décide de commercialiser les 5000 pièces prélevées :

- les pièces présentant les deux défauts sont invendables et sont détruites ;
- les pièces présentant uniquement un défaut de taille sont bradées au prix de 10 € chacune ;
- celles présentant uniquement un défaut de couleur sont soldées au prix de 25 € chacune ;
- enfin les pièces correctes sont vendues au prix de 30 € chacune.

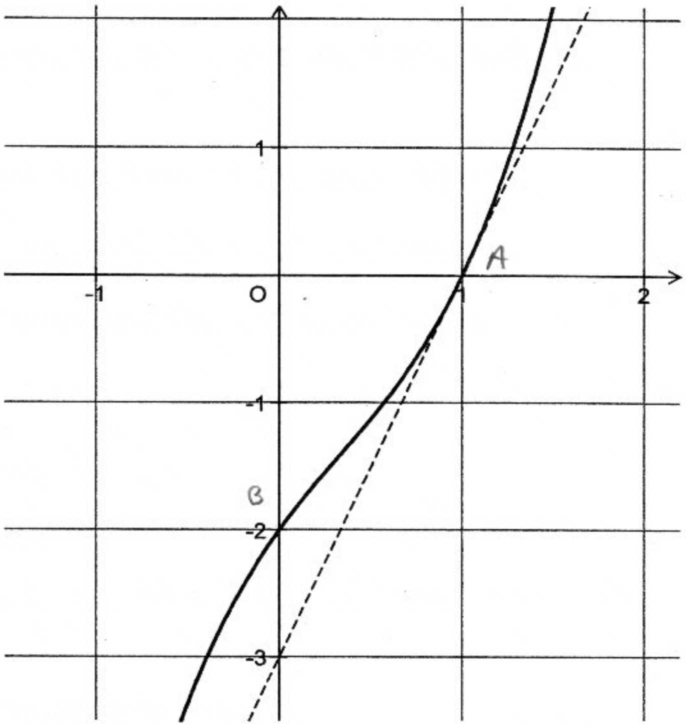
Sachant que le coût de fabrication d'une pièce est de 10 €, on considère la variable aléatoire X égale au bénéfice fait par l'entreprise sur chaque pièce, exprimé en euros.

5. L'entreprise peut espérer un bénéfice moyen, exprimé en euros, de :

   a) 18,68 **b)** 18,54 **c)** 18,89 **d)** 18,75

Problème (10 points)

Partie A : exploitation d'un graphique.



La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction g définie sur **R** par : $g(x) = x^3 - x^2 + ax + b$ où a et b désignent deux nombres réels.
On suppose g strictement croissante sur **R**.
Cette courbe coupe les axes de coordonnées aux points $A(1;0)$ et $B(0;-2)$.

La droite en pointillés est la tangente à la courbe au point d'abscisse 1. Elle coupe l'axe des ordonnées au point $C(0;-3)$.

1. Lire $g(1)$ sur le graphique.
   En déduire une relation entre a et b.

2. Donner la valeur de $g'(1)$.
   Écrire alors une relation vérifiée par a.

3. À l'aide des deux premières questions, déterminer les valeurs de a et b.

4. Donner le signe de $g(x)$ sur **R**.

Dans la suite, on admettra que : $g(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$.

Partie B : étude d'une fonction.

On considère maintenant la fonction f définie sur l'intervalle $]0;5]$ par :

$$f(x) = 4\ln x + x^2 - 2x + 1 + \frac{4}{x}.$$

Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

1. On admet que $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$.

   En remarquant que, pour tout x de l'intervalle $]0;5]$, $f(x) = \frac{1}{x}\left(4x\ln x + x^3 - 2x^2 + x + 4\right)$, déterminer la limite de la fonction f en zéro et interpréter graphiquement le résultat.

2. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0;5]$, $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^2}$ où g est la fonction définie dans la partie A.

   En déduire le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

Partie C : position relative de deux courbes.

Dans la question **1.** on demande de conjecturer des résultats à partir de la calculatrice ; dans la question **2.** on demande de prouver ces résultats.

1. Sur l'écran de la calculatrice, on fera apparaître la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f, ainsi que l'hyperbole Γ d'équation $y = \frac{4}{x}$.
Les résultats attendus dans cette question seront obtenus à partir de la lecture d'écran.

a) Faire un schéma reproduisant l'écran obtenu en précisant la fenêtre utilisée.

b) Les courbes $\mathscr{C}$ et Γ semblent avoir un point commun. Donner ses coordonnées.

c) Préciser la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à Γ.

2. On considère la fonction d définie sur l'intervalle $]0;5]$ par :

$$d(x) = f(x) - \frac{4}{x}.$$

a) À l'aide de la question précédente, proposer une solution de l'équation $d(x) = 0$ et, à l'aide d'un calcul, opérer une vérification.

b) Calculer $d'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction d.

c) En déduire le signe de $d(x)$ sur l'intervalle $]0;5]$.

d) La position de $\mathscr{C}$ par rapport à Γ précisée à la question **1. c)** est-elle confirmée ?

Partie D : calcul d'aire.

1. On considère la fonction H définie sur l'intervalle $]0;5]$ par : $H(x) = x\ln x - x$.
Montrer que H est une primitive de la fonction ln sur l'intervalle $]0;5]$.

2. Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la courbe Γ et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$. Le résultat sera donné en unités d'aire.