SUJET SORTI

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE
STI ARTS APPLIQUÉS

MATHÉMATIQUES

SESSION 2009

Durée : 2 heures   Coefficient : 2

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.

Calculatrice autorisée, conformément à la circulaire n°99- 186 du 16 novembre 1999.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet

Dès que le sujet vous est remis, assurez – vous qu'il est complet

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5 dont une page annexe en 5/5.

EXERCICE (sur 8 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Parmi les réponses proposées, une seule est correcte. Recopier pour chaque question le numéro de question suivi de la proposition qui vous semble exacte. Aucune justification n'est demandée. Toutes les questions sont indépendantes. Chaque bonne réponse rapporte 1 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte aucun point.

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\ ;+\infty[$ par $f(x)=1+\dfrac{1}{x+1}$ alors :

a. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$ b. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-\infty$ c. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=+\infty$

2. Une autre écriture de $e^{-\ln(2)}$ est :

a. 2 b. -2 c. $\dfrac{1}{2}$

3. Sur l'ensemble $]1\ ;+\infty[$, l'équation $\ln(x-1)=1$ admet comme solution :

a. 1 b. $1+e$ c. $e-1$

4. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère la conique $\boldsymbol{C}$ d'équation $4x^2+9y^2-36=0$ alors :

a. $\boldsymbol{C}$ n'a pas de foyer
b. $\boldsymbol{C}$ a pour foyers les points $F_1\left(\sqrt{5};0\right)$ et $F_2\left(-\sqrt{5};0\right)$
c. $\boldsymbol{C}$ a pour foyers les points F_1 ($\left(\sqrt{3};0\right)$ et F_2 ($\left(-\sqrt{3};0\right)$

5. Soient A et B sont deux événements associés à une expérience aléatoire. Pour tout événement X, on note $p(X)$ sa probabilité.

On suppose que : $p(A)=0{,}25$, $p(B)=0{,}6$ et $p(A\cup B)=0{,}7$ alors $p(A\cap B)$ est égal à :

a. 0,35 b. 0,85 c. 0,15

6. Le plan est rapporté à un repère orthonormal. On considère les points E $(0; -1)$ et F $\left(3\sqrt{5};1\right)$.

La distance EF est égale à :

a. $3\sqrt{5}$ b. 7 c. $\sqrt{7}$

7. Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = e^{2x} + 1$. Une primitive F de la fonction f est définie sur **R** par :

a. $F(x) = e^{2x} + x$ b. $F(x) = 2e^{2x}$ c. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + x - 3$

8. Le plan est rapporté à un repère orthonormal, on considère la conique C_1 d'équation

$5x^2 - y^2 - 25 = 0$ et la droite D_1 d'équation $y = x$.

La conique C_1 et la droite D_1 :

a. n'ont pas de point d'intersection

b. ont deux points d'intersection de coordonnées $\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$ et $\left(-\frac{5}{2},-\frac{5}{2}\right)$

c. ont deux points d'intersection de coordonnées $\left(\sqrt{5},0\right)$ et $\left(-\sqrt{5},0\right)$

PROBLÈME (sur 12 points)

Le but de ce problème est de calculer la surface d'un pendentif en forme de tulipe.
Dans tout le problème, le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. On choisit pour unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I = $[0; 3]$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 2x + 3.$$

La courbe représentative de f dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ est notée C_f et donnée en ANNEXE page 5/5.

Ce graphique sera complété au fur et à mesure du problème.

1. Par lecture graphique, donner le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle I.

2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $K = \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = [0; 3]$ par : $g(x) = (3-x)\mathrm{e}^{x}$.

On appelle C_g la courbe représentative de g dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que pour tout x de l'intervalle I, on a : $g'(x) = (2-x)\mathrm{e}^{x}$ où g' désigne la fonction dérivée de la fonction g.

2. Étudier le signe de g' et dresser le tableau de variation de la fonction g.

3. a. Reproduire et compléter le tableau de valeurs de la fonction g (arrondir les valeurs au dixième).

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$g(x)$			5,4	6,7			

3. b. Compléter le graphique de la feuille annexe en traçant la courbe C_g.

4. a. Montrer que la fonction G définie sur **R** par $G(x) = (4-x)\mathrm{e}^{x}$ est une primitive de la fonction g.

4. b. Donner la valeur exacte de l'intégrale $J = \int_0^3 g(x)\mathrm{d}x$.

Partie C

1. Hachurer P_1 la portion de plan comprise entre les courbes C_f et C_g.

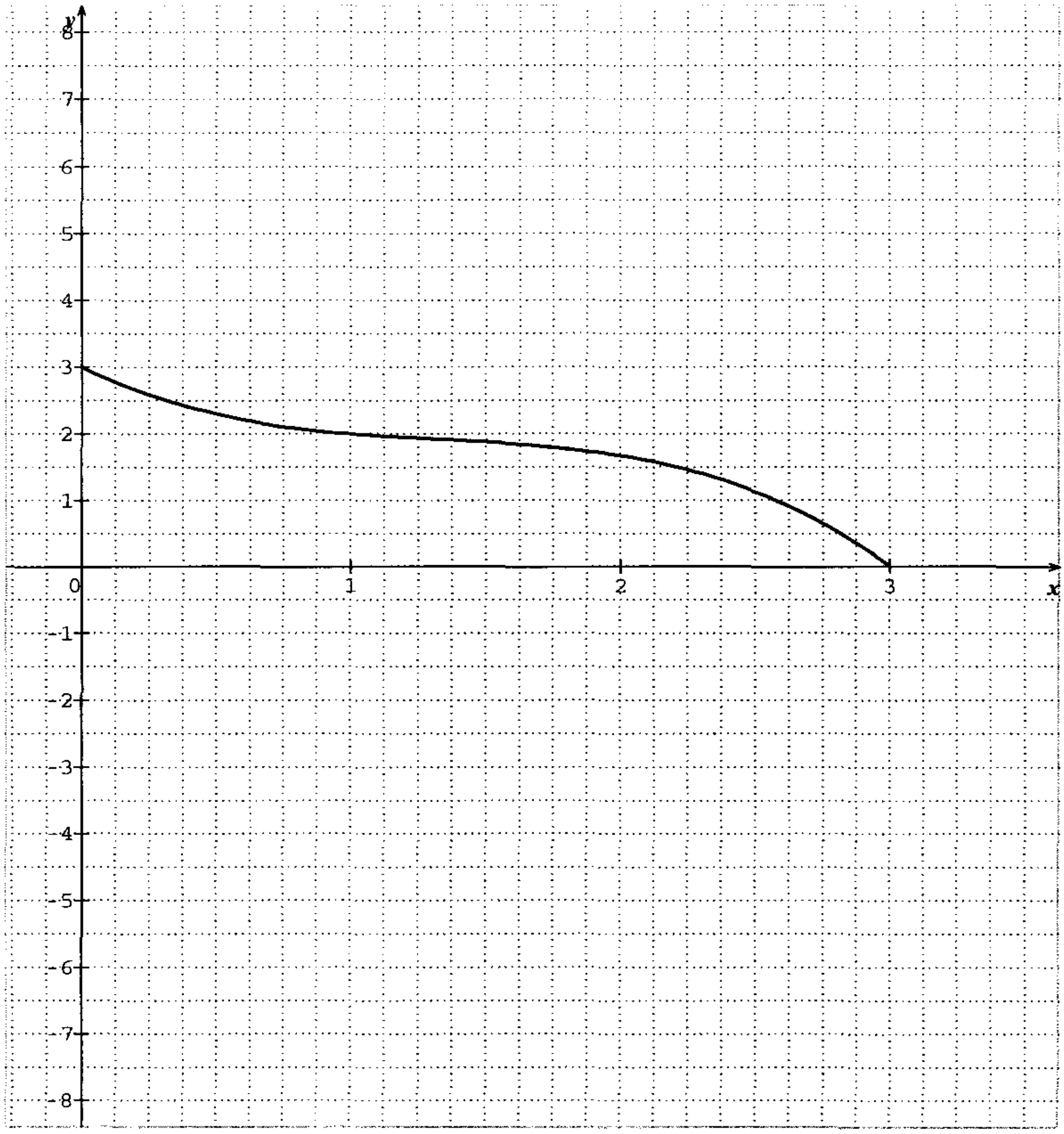
2. Construire les courbes Γ_f et Γ_g symétriques respectivement de C_f et C_g par rapport à l'axe des abscisses.

3. Hachurer P_2 la portion de plan comprise entre Γ_f et Γ_g.

4. En utilisant les résultats de la question A.2. et de la question B.4.b., exprimer en unités d'aire l'aire du motif représenté par les portions de plan P_1 et P_2.

En déduire une valeur exacte de l'aire en cm² puis la valeur arrondie au cm².

ANNEXE À RENDRE AVEC VOTRE COPIE



BACCALAURÉAT, SÉRIES STT spécialités comptabilité et gestion, informatique et gestion

STL spécialité biochimie - génie biologique

STI Arts Appliqués

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. STATISTIQUE *(SÉRIES STL, STT)*

Moyenne, variance, écart type

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; \quad V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}$$

Dans le cas d'un regroupement en classes :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i \; ; V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - (\bar{x})^2$$

II. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad ; \quad P(\Omega) = 1 \quad ; \quad P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

III. ALGÈBRE

A. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES*

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $\quad S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $\quad S_n = n + 1$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad ; \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

C. *ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ*

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles
  $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
- si $\Delta = 0$, une solution réelle double
  $$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$
- si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

IV. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS*

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, n entier naturel

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$, n entier naturel non nul

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\dfrac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$

(SÉRIES F12, STL)

$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v\circ u)' = (v'\circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL (SÉRIES F12, STT)*

Formule fondamentale

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES (SÉRIE STL)*

Équations	Solutions sur $]-\infty,+\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$