

PHYSIQUE APPLIQUEE

Durée : 4 H

Coef : 4

AVERTISSEMENT AUX CANDIDATS :

- Les trois parties du problème sont indépendantes.
- Le sujet comporte une annexe.

NOTATIONS UTILISEES :

- u, v, i, \dots pour les valeurs instantanées.
- $\underline{U}, \underline{V}, \underline{I}, \dots$ pour les grandeurs complexes associées à ces valeurs instantanées en régime sinusoïdal.
- U, V, I, \dots pour les modules de ces grandeurs complexes.
- $U(p), V(p), I(p), \dots$ pour les transformées de Laplace des valeurs instantanées u, v, i, \dots

PREMIERE PARTIE

DETERMINATION DE LA RESISTANCE D'ARC DU FOUR

On se propose d'étudier quelques caractéristiques du circuit électrique du four à arc du système afin d'accéder à la résistance d'arc du four R_a .

1. Etude du circuit électrique du four à arc

Le schéma du circuit à étudier est donné *figure 1*.

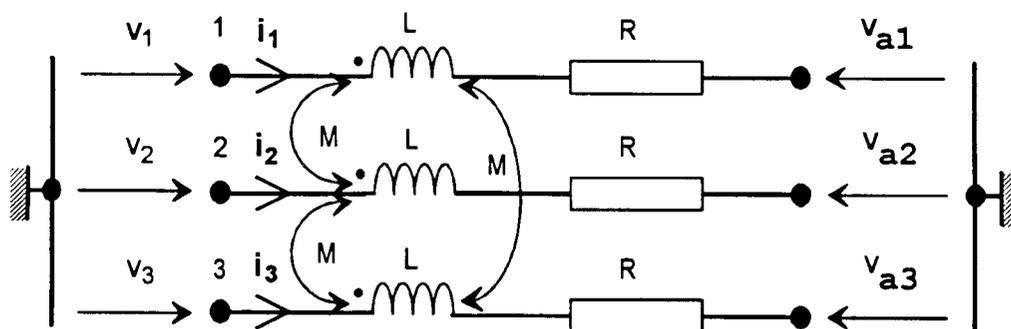


figure 1

Les bornes 1, 2 et 3 sont issues du secondaire du transformateur triphasé d'alimentation du four.

Les trois dipôles notés R et L sont supposés identiques. Ils modélisent les câbles, les bras porte-électrodes et les électrodes du four. De plus, les trois dipôles inductifs (L) sont couplés par inductance mutuelle M.

Les arcs électriques sont représentés par les trois tensions d'arc v_{a1}, v_{a2} et v_{a3} .

FCE 2

2.7. Déterminer l'expression de \underline{C}_1 en fonction de K_1 et K_2 .

2.8. Déterminer l'expression de ω_{0A} pour laquelle le module A_A de \underline{A}_A est maximal.

2.9. Déterminer l'expression de $\underline{A}_{0A} = \underline{A}_A(\omega_{0A})$.

2.10. Déterminer le module et l'argument de \underline{A}_A pour $\omega \rightarrow 0$ et pour $\omega \rightarrow \infty$.

2.11. En déduire la nature du filtre.

2.12. La valeur de τ dépend de la fréquence de l'horloge qui pilote le filtre : $\tau = \frac{50}{2\pi f_H}$.

Déterminer l'expression de la fréquence f_{0A} sélectionnée par ce filtre en fonction de f_H et de α_A .

2.13. Application numérique : calculer le module et l'argument de \underline{A}_{0A} et calculer f_{0A}

si $f_H = 2500$ Hz, $\alpha_A = 0,90$, $K_1 = K_2 = \frac{1}{33}$.

Filtre B : c'est un filtre passe bande qui ne sera pas étudié.

Il sélectionne $f_{0B} = \frac{f_H}{50}$.

Filtre C : c'est un filtre passe bande qui ne sera pas étudié.

Il sélectionne $f_{0C} = \frac{1,05f_H}{50}$.

3. Utilisation du filtre passe bande

L'ensemble des filtres A, B et C en cascade constitue un filtre du sixième ordre dont la courbe de réponse en fréquence est donnée sur la *figure 12 page 13*.

Les *figures 13 et 14 page 13* représentent les spectres de la tension u_2 en absence de moussage et pendant le moussage. Les valeurs données sont des **valeurs efficaces**.

Déterminer la valeur efficace des harmoniques de la tension v_F en sortie du filtre passe bande :

- en absence de moussage,
- pendant la phase de moussage.

4. Présentation de la fonction valeur efficace 1

Elle est réalisée à l'aide d'un circuit intégré qui permet d'élaborer une tension continue V_Z proportionnelle à la valeur efficace V_F de la tension d'entrée v_F .

Le facteur d'échelle a été réglé à 1 : $V_Z = V_F$.

Déterminer la valeur de la tension continue V_Z :

- en absence de moussage (notée V_{Z1}),
- pendant la phase de moussage (notée V_{Z2}).

5. Utilisation du filtre passe haut

Il est constitué par six filtres du deuxième ordre en cascade.

Sa réponse en fréquence est donnée par la *figure 15 page 13*.

FCE 2

En utilisant les *figures 13 et 14*, déterminer la valeur efficace des harmoniques de la tension v_G en sortie du filtre passe haut :

- en absence de moussage,
- pendant la phase de moussage.

6. Présentation de la fonction valeur efficace 2

Elle est semblable à la fonction valeur efficace 1 mais le facteur d'échelle est égal à quatre :

$$V_X = 4V_G.$$

On rappelle que si $u = U_{M1} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + U_{M2} \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots$, sa valeur efficace est

$$U = \sqrt{\frac{1}{2} U_{M1}^2 + \frac{1}{2} U_{M2}^2 + \dots}$$

Déterminer la valeur de la tension continue V_X :

- en absence de moussage (notée V_{X1}),
- pendant la phase de moussage (notée V_{X2}).

7. Etude de la comparaison de V_Z et de V_X

Elle est réalisée à l'aide d'un circuit intégré qui permet de générer une tension continue V_S donnée par la relation suivante :

$$V_S = K \frac{V_Z}{V_X}$$

7.1. Détection du moussage :

L'apparition du phénomène de moussage doit provoquer la saturation en sortie du circuit intégré ($V_S = 15V$).

Sachant que V_Z vaut alors 0,75V et que $K = 1V$, déterminer la valeur efficace maximale V_{GM} que peut avoir v_G pour provoquer cette saturation.

7.2. Détection de l'absence de moussage :

En absence de moussage V_S est égale à 0,72V alors que $V_Z = 0,8V$.

Déterminer dans ce cas la valeur efficace V_G de v_G .

8. Synthèse :

8.1. Avec les valeurs V_{Z1} , V_{Z2} , V_{X1} et V_{X2} obtenues dans les questions 4 et 6, montrer qu'il est possible de détecter la phase de moussage (voir question 7).

8.2. Observer les analyses spectrales de u_2 *figures 13 et 14* et justifier le choix de la fréquence de coupure du filtre passe haut (500 Hz).

8.3. En supposant que la valeur du courant d'arc puisse varier de façon importante sans que sa forme ne change beaucoup, indiquer quel peut être l'intérêt d'étudier le rapport des tensions V_Z et V_X .

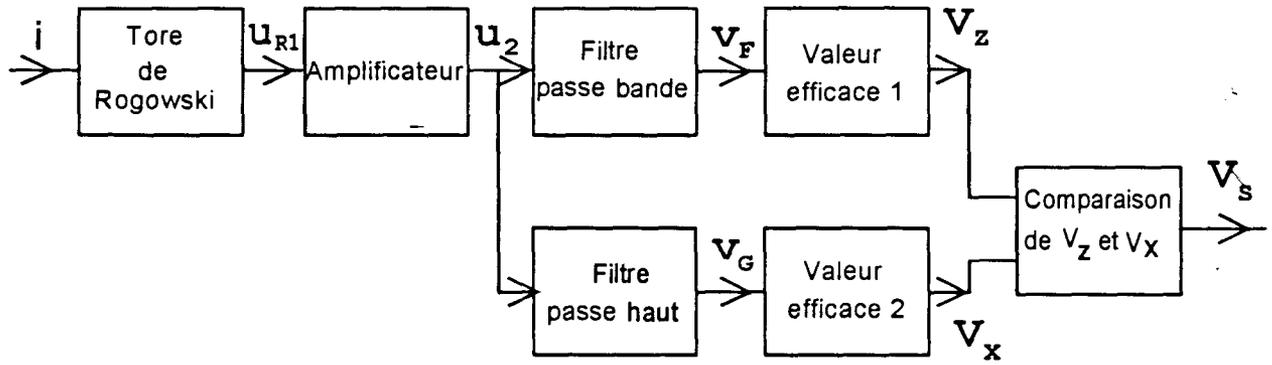


figure 10

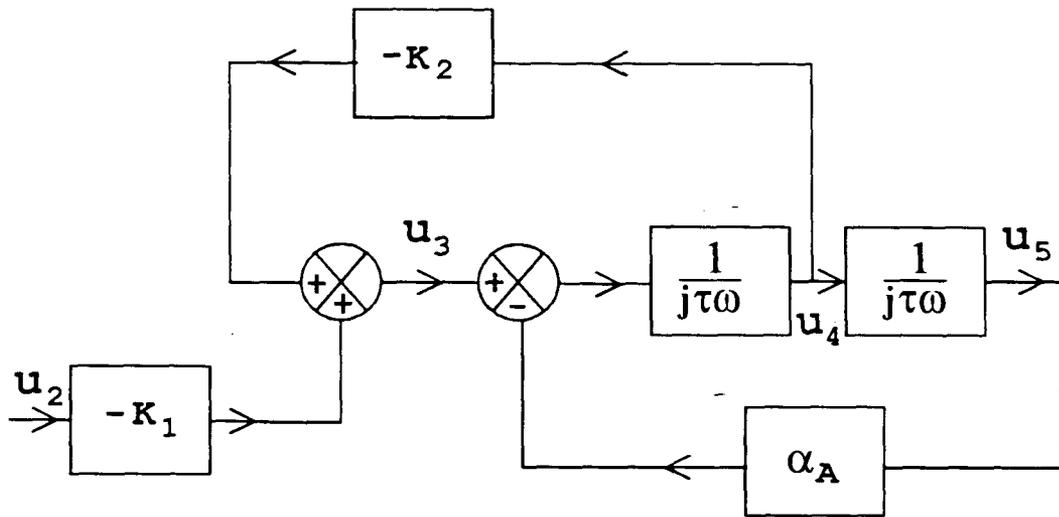


figure 11 : filtre A

FCE 2

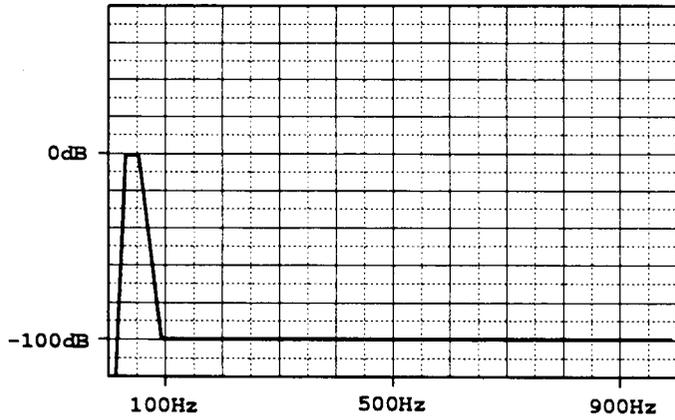


Figure 12

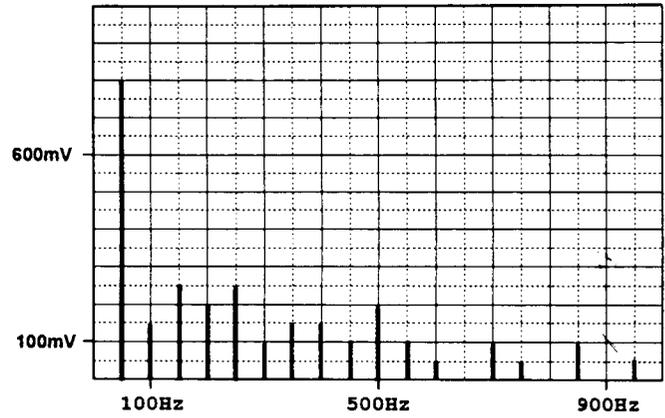


Figure 13 : spectre de u_2 en absence de moussage

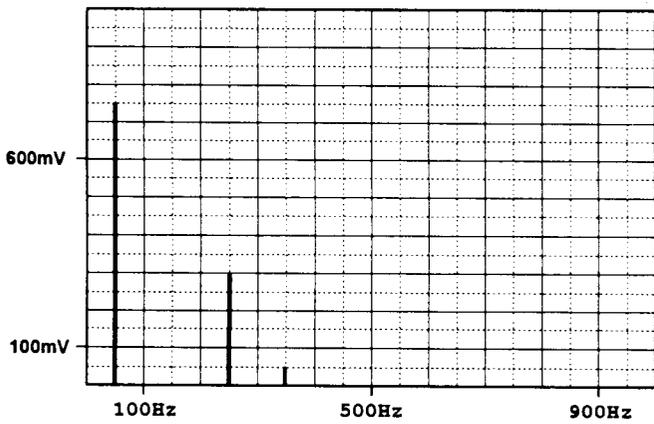


Figure 14 : spectre de u_2 pendant le moussage

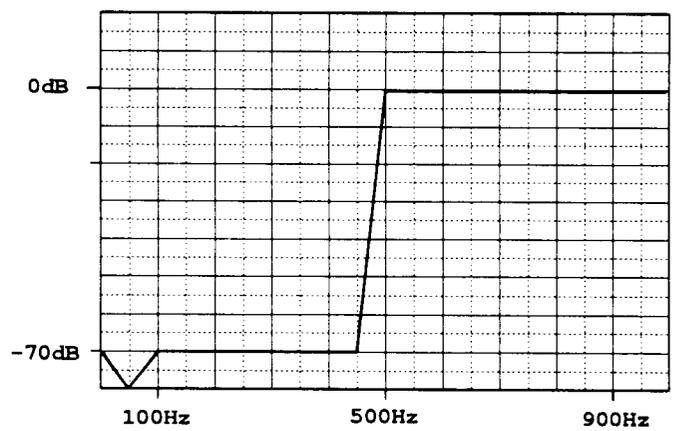


Figure 15

ANNEXE :

Théorème d'Ampère : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$

Théorème de la valeur finale :

Soit $F(p)$ la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$:

$$\text{on a : } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p)$$

FCE 2

1.1. Ecrire les équations différentielles donnant les tensions v_1 , v_2 et v_3 existant entre les bornes 1, 2, 3 et la masse (cuve du four) en fonction des intensités des courants de ligne, des tensions d'arc et de R , L et M .

1.2. Le système triphasé (i_1 , i_2 , i_3) étant équilibré, écrire la relation existant entre les intensités de ces courants.

complexes

1.3. Les tensions d'arc formant un système triphasé équilibré, l'étude du circuit triphasé peut se ramener à une phase.

Déduire de la question précédente l'expression de la tension v_1 en fonction de i_1 , v_a , R , L et M .

1.4. Chaque arc est modélisé par une résistance R_a . On se limitera à l'étude du circuit de la *figure 2* en régime sinusoïdal (ce qui est pratiquement réalisé lors du moussage).

Ecrire la relation existant entre la tension complexe \underline{V} , l'intensité complexe \underline{I} , R , R_a , L et M .

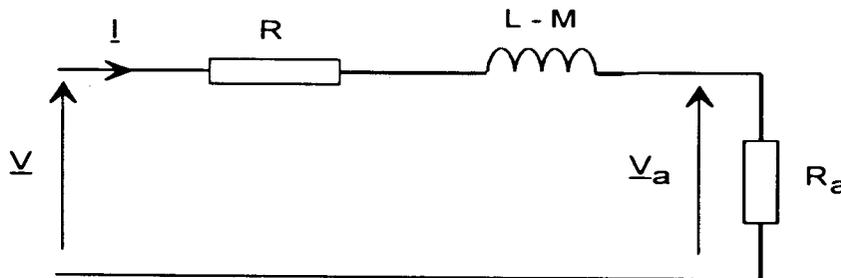


figure 2

1.5. Montrer que la résistance d'arc R_a peut s'écrire : $R_a = \sqrt{\left(\frac{V}{I}\right)^2 - (L-M)^2 \omega^2} - R$.

1.6. Application numérique : $V = 289V$, $I = 50 \text{ kA}$, $R = 0,50 \text{ m}\Omega$, $X = (L-M)\omega = 2,5\text{m}\Omega$.
Calculer la résistance d'arc du four R_a .

2. Etude d'une bobine de Rogowski

En réalité, le circuit triphasé n'est pas tout à fait équilibré et les courants et les tensions ne sont pas sinusoïdaux (surtout lorsqu'il n'y a pas moussage). Afin de pouvoir réguler la résistance d'arc, il faut la déterminer avec précision au moyen d'un calculateur. Cela nécessite de mesurer pour une phase : la tension v_1 , l'intensité i_1 et les dérivées des intensités des trois courants, soit $\frac{di_1}{dt}$, $\frac{di_2}{dt}$ et $\frac{di_3}{dt}$, à cause des effets inductifs des montages et des couplages par inductance mutuelle.

On propose dans cette partie d'étudier un capteur qui donne une tension proportionnelle à la dérivée de i : c'est la bobine de Rogowski.

2.1. Soit un fil conducteur parcouru par un courant d'intensité i variable dans le temps (*figure 3 page suivante*).

En utilisant le théorème d'Ampère (donné en annexe), déterminer le module du vecteur champ magnétique \vec{B} existant à la distance r du conducteur placé dans l'air.

FCE 2

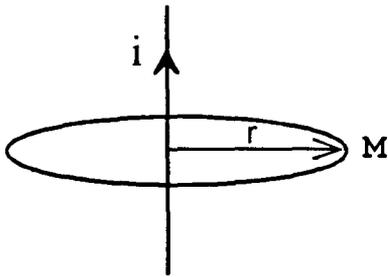


figure 3

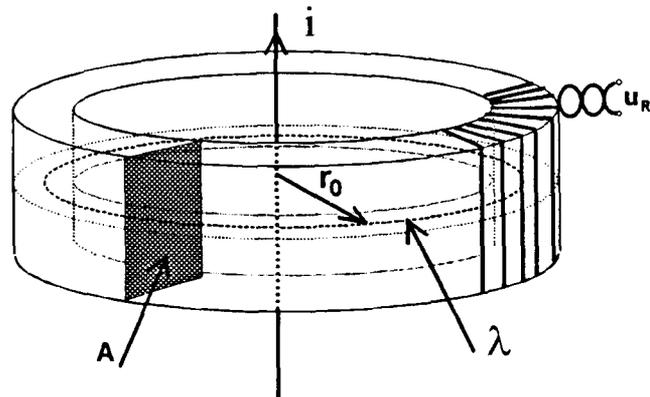


figure 4

2.2. La bobine de Rogowski est un tore de section rectangulaire A , de longueur moyenne λ , possédant N spires bobinées autour d'un noyau en matière synthétique, non magnétique (figure 4).

Exprimer le rayon moyen r_0 du tore en fonction de λ .

En déduire l'expression de B au centre d'une spire en fonction de μ_0 , i et λ .

On supposera que cette valeur est la même en tout point de la spire.

2.3. Donner l'expression du flux φ du vecteur champ magnétique \vec{B} (que l'on supposera homogène) à travers une spire de la bobine.

En déduire le flux total Φ à travers toute la bobine.

2.4. Déterminer l'expression de la tension u_R induite que l'on peut mesurer aux bornes de la bobine en fonction de λ , N , A et de la dérivée de i .

2.5. En déduire l'expression du coefficient k de proportionnalité entre u_R et $\left| \frac{di}{dt} \right|$.

2.6. Application numérique : $A = 2,0 \text{ cm}^2$, $\lambda = 40 \text{ cm}$, $N = 60$ spires, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.
Calculer le coefficient k .

DEUXIEME PARTIE

REGULATION DE LA RESISTANCE D'ARC :
ETUDE DE L'ASSERVISSEMENT

Le principe de régulation à puissance active constante du four nécessite un asservissement de la résistance d'arc. La résistance d'arc dépend essentiellement de la distance h entre le bain de métal et l'extrémité de l'électrode.

Le système E.M.P.E.R.E. utilise un calculateur analogique qui calcule la résistance d'arc R_a , pour une phase, à partir de la tension v entre le bras porte électrode et la cuve du four et des tensions u_{R1} , u_{R2} , u_{R3} délivrées par les tores de Rogowski (tensions proportionnelles aux dérivées des intensités des courants de phase : $\frac{di_1}{dt}$, $\frac{di_2}{dt}$, $\frac{di_3}{dt}$).

Le schéma fonctionnel de l'asservissement de la résistance d'arc est le suivant :

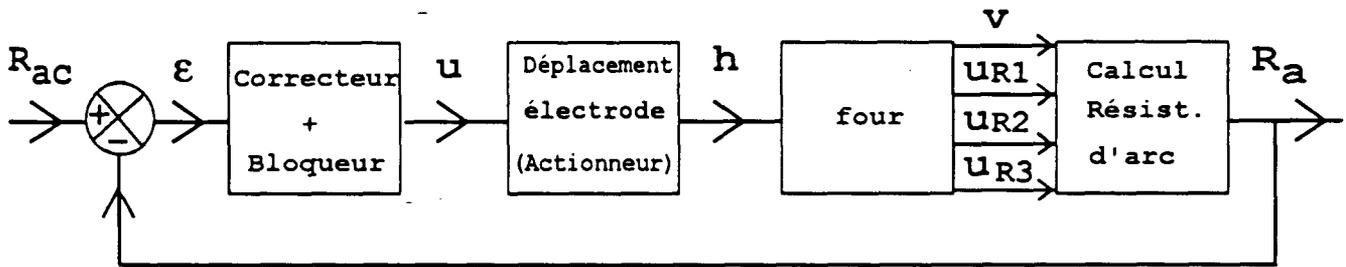


figure 5

- R_{ac} : consigne de résistance,
- u : tension de commande de l'actionneur,
- h : hauteur de l'électrode,
- R_a : résistance d'arc.

L'actionneur est défini par l'ensemble de composants qui transforme le signal de commande u , issu du bloqueur, en mouvement de l'électrode : h .

Soit $H(p)$ et $U(p)$ les transformées de Laplace de $h(t)$ et $u(t)$:

la transmittance de l'actionneur est : $F(p) = H(p)/U(p)$.

(Actionneur, four et calcul de la résistance d'arc sont des processus analogiques)

Pour effectuer une étude simplifiée de l'asservissement, l'ensemble (four + calcul de la résistance d'arc) est modélisé par une fonction « Arc » d'entrée h , de sortie R_a (figure 6).

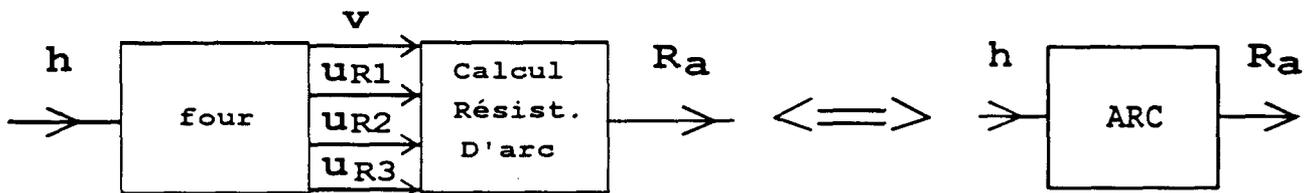


figure 6

FCE 2

La relation entre R_a et h est linéaire pour $h < 0,3$ m. On suppose cette condition réalisée.

On a alors : $R_a = K_a \cdot h$, avec $K_a = 1,0 \cdot 10^{-2} \Omega/m$.

Dans la suite du problème, on considérera la fonction Arc comme un processus analogique dont la transmittance de Laplace est la constante réelle K_a .

Le signal R_a est échantillonné. Les échantillons de R_a sont pris en compte par un calculateur numérique qui les compare à la résistance de consigne R_{ac} .

Le calculateur effectue également la fonction correction, (comparateur et correcteur sont donc des processus numériques).

Modélisation de l'asservissement

Vu la grande inertie de l'actionneur (fréquence de résonance $f_R \approx 3$ Hz) et la valeur de la fréquence d'échantillonnage $f_e = 50$ Hz le signal de sortie du bloqueur (signal en marche d'escalier) est lissé par l'actionneur.

La contribution du bloqueur est alors un simple retard $\tau = T_e/2$ avec $T_e = 1/f_e$.

Sa transmittance de Laplace sera : $B_0(p) = \exp(-\frac{pT_e}{2})$.

La contribution du correcteur peut être modélisée par sa réponse en fréquence (fonction de transfert isochrone $C_i(j\omega)$).

L'étude de l'asservissement se fera comme pour un système continu en définissant une transmittance de Laplace pour chaque fonction.

Le schéma fonctionnel est alors le suivant :

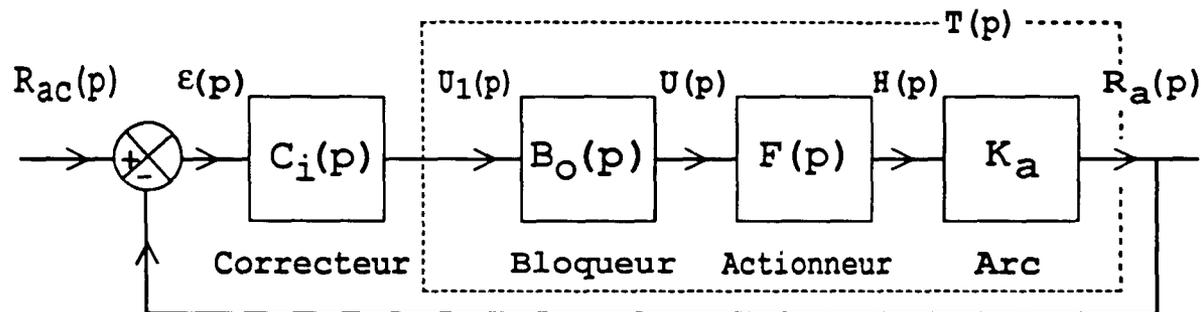


figure 7

La transmittance $F(p)$ de l'actionneur est :

$$F(p) = \frac{K_0}{p(1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2})} \quad \text{avec : } K_0 = 8,3 \cdot 10^{-3} \text{ m/(s.V) , } \omega_0 = 20 \text{ rad/s , } m = 0,80$$

On rappelle que $K_a = 1,0 \cdot 10^{-2} \Omega/m$.

1. Etude du correcteur

Le correcteur numérique a pour transmittance :

$$C(z) = \frac{U_1(z)}{\varepsilon(z)} = K \frac{(1-az^{-1})}{(1+bz^{-1})}$$

$U_1(z)$ transformée en z de la séquence $\{u_1(nT_e)\}$,

$\varepsilon(z)$ transformée en z de la séquence $\{\varepsilon(nT_e)\}$,

a et b sont des réels positifs, K est un coefficient positif en V/Ω .

1.1. Déterminer l'algorithme de calcul du correcteur en fonction de a, b, K et des échantillons d'entrée et de sortie.

Fonction de transfert isochrone :

La fonction de transfert isochrone $C_i(j\omega)$ du correcteur est obtenue en remplaçant z par $\exp(j\omega T_e)$ dans C(z).

$$C_i(j\omega) = C(\exp(j\omega T_e)).$$

1.2. Déterminer l'expression de $C_i(j\omega)$ en fonction de K, a, b, ω et T_e .

Pour la suite du problème, on donne l'expression du module et de l'argument de $C_i(j\omega)$:

$$|C_i(j\omega)| = K \frac{\sqrt{(1-a \cos \omega T_e)^2 + (a \sin \omega T_e)^2}}{\sqrt{(1+b \cos \omega T_e)^2 + (b \sin \omega T_e)^2}}$$

$$\text{Arg}(C_i(j\omega)) = \text{Arc tan} \left[\frac{a \sin \omega T_e}{1-a \cos \omega T_e} \right] + \text{Arc tan} \left[\frac{b \sin \omega T_e}{1+b \cos \omega T_e} \right].$$

2. Etude de la correction

2.1. Correction proportionnelle

On choisit : a = 0, b = 0.

Le correcteur a alors pour transmittance : $C_i(p) = K$.

Les diagrammes des *figures 8 et 9 page 8* représentent module et argument de la fonction de transfert

$$T(j\omega) = K_a \cdot F(j\omega) \cdot \exp\left(-\frac{j\omega T_e}{2}\right) \quad \left(T(p) = \frac{R_a(p)}{U_1(p)} \text{ voir } \textit{figure 7 page 5} \right)$$

2.1.1. Déterminer graphiquement en utilisant le critère du revers la valeur limite de K au delà de laquelle l'asservissement est instable en boucle fermée.

On appelle K_c cette valeur de K.

FCE 2

Etude de la précision

La transmittance de la chaîne d'action corrigée est :

$$T_c(p) = K \cdot T(p) = K \cdot K_a \cdot F(p) \cdot \exp\left(-\frac{pT_e}{2}\right)$$

2.1.2. Montrer que : $\varepsilon(p) = \frac{1}{1+T_c(p)} \times R_{ac}(p)$.

2.1.3. On applique à l'entrée un échelon de consigne d'amplitude $R_0 = 0,1 \text{ m}\Omega$.

Donner l'expression de $\varepsilon(p)$ en fonction de $T_c(p)$, p , R_0 .

Calculer à l'aide du théorème de la valeur finale (donné en annexe) l'erreur de « position » :

$$\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) \text{ quand } t \rightarrow \infty.$$

2.1.4. On applique à l'entrée une rampe de pente α :

$$R_{ac}(t) = \alpha t \text{ pour } t \geq 0, R_{ac}(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$

Donner l'expression de $\varepsilon(p)$ en fonction de $T_c(p)$, p et α .

(On rappelle que la transformée de Laplace de αt est α/p^2)

Déterminer l'expression de l'erreur de traînage ε_T en fonction de K_a , K_0 , K , et α :

$$\varepsilon_T = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) \text{ quand } t \rightarrow \infty.$$

Quelle est la valeur numérique minimale de ε_T lorsque $K = K_c$ et $\alpha = 1 \text{ m}\Omega/\text{s}$?

2.1.5. Pour avoir un minimum de marge de stabilité on choisit $K = 2 \times 10^5 \text{ V}/\Omega$.

Quelle est l'erreur de traînage correspondante pour la même rampe que précédemment ?

2.1.6. A l'aide des diagrammes *figures 8 et 9 page 8* déterminer la marge de phase de l'asservissement correspondant à cette valeur de K .

Cette marge de phase est-elle satisfaisante ?

2.2. Correction par avance de phase

On choisit : $a = 0,8$, $b = 0,6$.

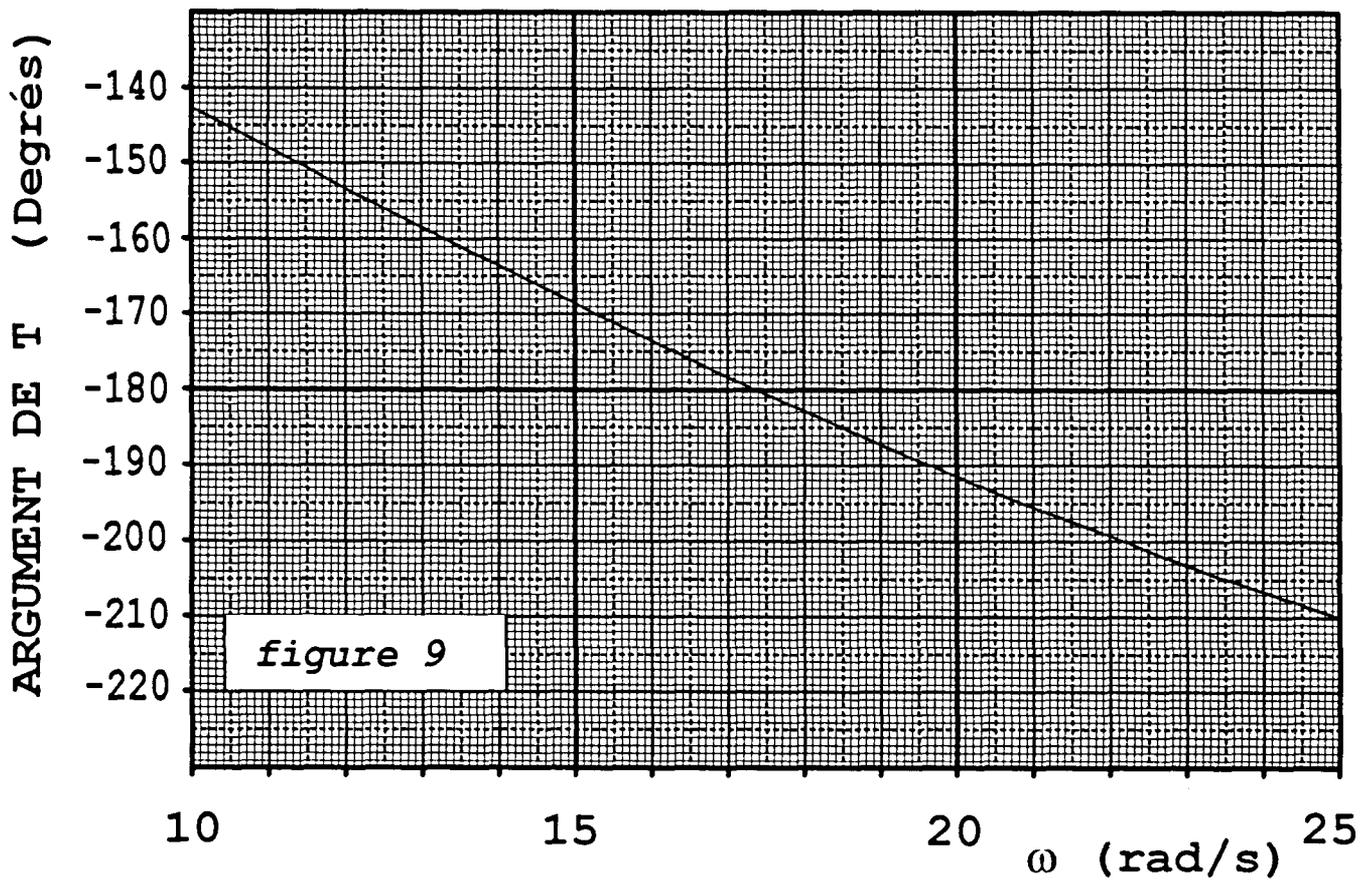
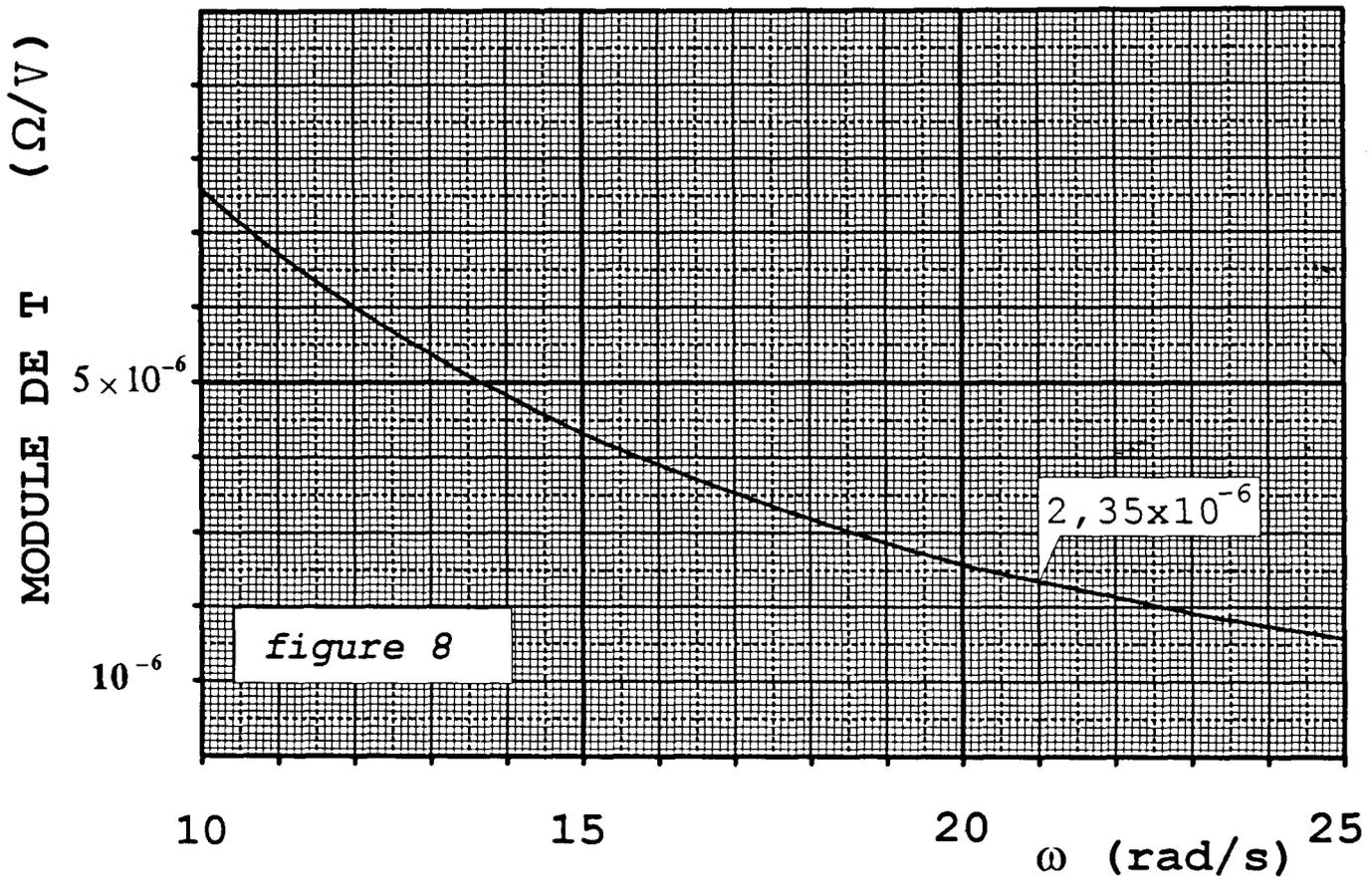
La transmittance de la chaîne d'action corrigée s'écrit maintenant :

$$T_c(p) = C_i(p) \cdot K_a \cdot F(p) \cdot \exp\left(-\frac{pT_e}{2}\right)$$

2.2.1. Déterminer la valeur à donner à K pour que l'erreur de traînage soit la même qu'à la question 2.1.5.

2.2.2. Calculer en prenant pour valeur de K la valeur trouvée à la question précédente et à l'aide des expressions données à la question 1.2. la valeur du module et de l'argument de $C_i(j\omega)$ pour $\omega = 21 \text{ rad/s}$.

2.2.3. En déduire en utilisant les diagrammes *figures 8 et 9* la valeur du module et de l'argument de $T_c(j\omega)$ pour $\omega = 21 \text{ rad/s}$. Quelle est maintenant la marge de phase de l'asservissement ? (on arrondit la valeur de module de $T_c(j\omega)$ pour $\omega = 21 \text{ rad/s}$ à sa partie entière).



TROISIEME PARTIE

DETECTION DU PHENOMENE DE MOUSSAGE

1. Introduction: principe de la détection de la phase de moussage du laitier

Les électrodes du four sont alimentées par un transformateur fournissant des tensions triphasées de fréquence 50Hz. Le courant dans les électrodes comporte en général de nombreux harmoniques. Mais lors du moussage, en raison de la stabilité de l'arc électrique, le courant devient presque sinusoïdal. Par l'intermédiaire du tore de Rogowski on élabore une tension u_{R1} qui est l'image de la dérivée du courant dans une électrode.

Cette tension est analysée par la carte « moussage » dont la fonction est de déterminer si le laitier mousse ou ne mousse pas.

Le dispositif fonctionne de la manière suivante :

- il compare la valeur efficace de certains harmoniques à celle du fondamental de u_{R1} ,
- le fondamental est récupéré à l'aide d'un filtre passe bande,
- les harmoniques sont récupérés à l'aide d'un filtre passe haut.

La *figure 10 page 12* donne le schéma fonctionnel de la carte « moussage ».

Les différentes parties seront étudiées à l'exception du tore de Rogowski et de l'amplificateur.

2. Etude du filtre passe bande

C'est un filtre à capacités commutées constitué par trois cellules en cascade : les filtres A , B et C. Seul le filtre A sera étudié.

L'entrée d'horloge des trois filtres est commune.

Le signal d'horloge a une fréquence $f_H = 2500$ Hz.

Etude du filtre A :

Structure : voir *figure 11 page 12* ; K_1 et K_2 sont des réels positifs.

2.1. Exprimer \underline{U}_3 en fonction de \underline{U}_2 et de \underline{U}_4 (relation 1).

2.2. Exprimer \underline{U}_4 en fonction de \underline{U}_3 et de \underline{U}_5 (relation 2).

2.3. Quelle est la fonction réalisée par la structure de fonction de transfert $\frac{1}{j\tau\omega}$?

2.4. Exprimer \underline{U}_5 en fonction de \underline{U}_4 et remplacer \underline{U}_5 dans la relation 2.

2.5. En déduire l'expression de \underline{U}_3 en fonction de \underline{U}_4 et utiliser la relation 1 pour déterminer

$$\underline{A}_A = \frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_2}$$

2.6. Mettre \underline{A}_A sous la forme : $\underline{A}_A = \frac{\underline{C}_1}{1 + \frac{j}{K_2}(\tau\omega - \frac{\alpha_A}{\tau\omega})}$