

- Le problème comporte trois parties qui, à part la question II.2.8, peuvent être traitées indépendamment.

- Rappel de trigonométrie :

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

- Rappel d'électricité :

La valeur moyenne de la tension obtenue par redressement monoalternance d'une tension sinusoïdale d'amplitude V_m est $\frac{V_m}{\pi}$ ou $-\frac{V_m}{\pi}$ selon le branchement de la diode utilisée.

- Rappel de physique :

La fréquence du signal $A \cos[\theta(t)]$, où $A = C^{ste}$, est : $f(t) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{d\theta(t)}{dt} \right|$

I. Principe d'un radioaltimètre

Un oscillateur embarqué dans un avion émet un signal sinusoïdal $s(t)$ modulé en fréquence (fig.1). Ce signal se propage verticalement à la vitesse $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s. Au contact du sol, il donne naissance à une onde réfléchie : on ne tient compte ni du changement de phase dû à la réflexion ni de l'effet Doppler.

Une antenne solidaire de l'avion capte l'onde réfléchie $r(t)$ et permet à un radioaltimètre de mesurer l'altitude z de celui-ci à partir du temps τ nécessaire à l'onde radioélectrique pour effectuer l'aller-retour entre l'avion et le sol.

I.1. La fréquence $f_c(t)$ du signal $s(t)$ émis par l'oscillateur embarqué, varie périodiquement au cours du temps selon le graphe de la figure 2 : entre les instants $t = 0$ et $t = t_0$, $f_c(t)$ croît de f_0 à $f_0 + \delta f$.

Pour $0 < t < t_0$, établir, à partir du graphe, la loi de variation de la fréquence $f_c(t)$ en fonction de t , de f_0 , de δf et de t_0 .

I.2. On pose : $s(t) = A \cos[\theta(t)]$ et $f_c(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt}$; de plus, $s(t) = A$ à l'instant $t = 0$.

Etablir pour $0 < t < t_0$ l'expression mathématique de $s(t)$ en fonction de A , f_0 , δf , t_0 et t .

I.3. Le signal capté par l'antenne réceptrice s'écrit : $r(t) = a \cdot s(t - \tau)$.

Etablir l'expression mathématique de $r(t)$ en fonction de a , A , f_0 , δf , t_0 , τ et t .

Donner la signification physique des paramètres a et τ .

En déduire l'expression de τ en fonction de l'altitude z et de la vitesse de propagation c .

Quelle est la valeur de τ si l'altitude de l'avion est $z = 300$ m ?

I.4. Les signaux $s(t)$ et $r(t)$ sont multipliés (fig.3) et le signal résultant $n(t) = k \cdot r(t) \cdot s(t)$ est traité par un filtre passe bas. D'une manière générale, on a : $\delta f \ll f_0$ et $\tau \ll t_0$.

I.4.1. Montrer que $n(t)$ est composé de deux termes sinusoïdaux dont l'un (de basse fréquence) a une fréquence ne dépendant pas explicitement de t , tandis que la fréquence de l'autre varie avec t . Calculer ces deux fréquences en fonction de f_0 , δf , t_0 , τ et t .

I.4.2. Application numérique : $f_0 = 4240$ MHz, $\delta f = 123$ MHz, $t_0 = 9,67$ ms et $\tau = 2,0$ μ s.

Calculer les fréquences des deux composantes de $n(t)$ aux dates $t = 0$ et $t = t_0$.

I.4.3. Le filtre passe-bas, (fig.3), possède une fréquence de coupure f_c telle que :

$$\tau \frac{\delta f}{t_0} < f_c < 2 f_0$$

Ce filtre ne transmet, sans amplification ni atténuation, que les signaux sinusoïdaux dont la fréquence est inférieure à f_c . Donner l'expression de son signal de sortie $v(t)$.

On note f_b la fréquence du signal $v(t)$. Exprimer f_b en fonction de δf , c , t_0 et z (on notera $\{ \}$ l'équation correspondante). Montrer que f_b est une image de l'altitude z .

I.5. Calculer le taux de variation $\frac{d f_b(t)}{dt}$ de la fréquence $f_b(t)$ du signal $s(t)$.

Montrer que l'équation $\{ \}$ trouvée à la question I.4.3, équivalant à : $f_b(t) = \tau \frac{d f_c(t)}{dt}$.

I.6. Sachant que la fréquence $f_c(t)$ dépend d'une tension de commande $m(t)$ selon la relation : $f_c(t) = f_0 + a \cdot m(t)$, avec $a = 30 \cdot 10^6$ Hz/V et $f_0 = 4240$ MHz,

déterminer la transmittance de Laplace du bloc dont la grandeur d'entrée est $M(p) = \mathcal{F}\{m(t)\}$ et dont la grandeur de sortie est $F_b(p) = \mathcal{F}\{f_b(t)\}$.

I.7. En pratique, la fréquence f_0 et l'excursion de fréquence δf sont constantes; en revanche, un asservissement régule la fréquence f_b et ajuste pour cela la durée t_0 de façon qu'en régime permanent, l'équation $\{ \}$ soit vérifiée.

Montrer que, dans ces conditions, si f_b est fixe, la durée t_0 est une image de l'altitude z .

II. Modélisation de la boucle d'asservissement de la fréquence f_b

Le schéma synoptique de cette boucle est donné à la figure 4.

Le récepteur et l'oscillateur contrôlé en tension qui délivre le signal $s(t)$ de fréquence $f_c(t)$, ont été étudiés dans la première partie.

II.1. Etude du correcteur et du générateur de dents de scie

Le correcteur et le générateur de dents de scie sont tous deux construits selon le schéma de principe de la figure 5.

L'amplificateur opérationnel de chacun de ces deux dispositifs est supposé parfait (les imperfections dues aux courants et tensions de décalage étant limitées par le bouclage du système).

II.1.1. Etablir l'expression de la transmittance de Laplace $H(p) = \frac{U_s(p)}{U_c(p)}$.

II.1.2. Pour le correcteur, on prend : $R = 100 \text{ k}\Omega$, $C = 2,2 \text{ }\mu\text{F}$.

Calculer la transmittance $I(p) = D(p) / U(p)$ de ce correcteur dont la grandeur d'entrée est $u(t)$ et dont la grandeur de sortie est $d(t)$.

II.1.3. Pour le générateur de dents de scie, on prend $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 10 \text{ nF}$.

Calculer sa transmittance de Laplace $G(p) = M(p) / D(p)$.

II.2. Etude du discriminateur

Le schéma du discriminateur est donné à la figure 6. Les diodes sont supposées parfaites et la constante de temps $R_0 C_0$ est suffisamment grande par rapport à la période de $v(t)$ pour que la tension $u(t)$ reste constante et égale à $U(f_b)$ lorsque la fréquence de $v(t)$ reste constante et égale à f_b .

II.2.1. Le schéma commun des filtres passe-bande FPB1 et FPB2 est donné à la figure 7. Dans ce schéma, l'amplificateur opérationnel est supposé parfait.

Etablir, en régime harmonique, la transmittance complexe Y_d / Y_c et la mettre sous la forme :

$$\frac{Y_d}{Y_c} = \frac{A_0}{1 + j Q_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

$$\text{avec : } A_0 = \frac{R_3}{2 R_1}, \quad \omega_0 = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3}} \quad \text{et} \quad Q_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_3 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2}}$$

II.2.2. Toutes les capacités sont égales à $1,00 \text{ nF}$. Pour le filtre FPB1, on a $R_1 = 39,2 \text{ k}\Omega$,

$R_2 = 698 \text{ }\Omega$, $R_3 = 53,6 \text{ k}\Omega$; pour le filtre FPB2 : $R_1 = 44,2 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 549 \text{ }\Omega$, $R_3 = 88,7 \text{ k}\Omega$.

Calculer les valeurs numériques des paramètres A_0 , Q_0 , ω_0 du filtre FPB1 et les valeurs numériques A_0 , Q_0 , ω_0 du filtre FPB2.

II.2.3. L'amplitude de la tension sinusoïdale $v(t) = V_m \cos(2\pi f_b t)$ de la figure 6 est constante : $V_m = 10 \text{ V}$; sa fréquence f_b est variable.

Pour la valeur particulière $f_b = f_{01} = \omega_{01} / 2\pi$ définie à la question II.2.2, calculer l'amplitude $V_{1m}(f_{01})$ de la tension $v_1(t)$ et l'amplitude $V_{2m}(f_{01})$ de la tension $v_2(t)$.

Calculer de même les amplitudes respectives $V_{1m}(f_{02})$ et $V_{2m}(f_{02})$ des tensions $v_1(t)$ et $v_2(t)$ pour la fréquence $f_b = f_{02} = \omega_{02} / 2\pi$.

II.2.4. On se place à la fréquence $f_b = f_{01}$ et on fait l'hypothèse que les tensions $v_1(t)$ et $v_2(t)$ de la figure 6 sont des tensions redressées "monoalternance".

Compte tenu des sens différents des diodes D_1 et D_2 , dessiner l'allure des tensions $v'_1(t)$ et $v'_2(t)$ et calculer les valeurs moyennes respectives $V'_{1moy}(f_{01})$ et $V'_{2moy}(f_{01})$ de ces tensions.

Etablir et justifier la relation entre les valeurs moyennes respectives $I_{1moy}(f_{01})$, $I_{2moy}(f_{01})$ et $I_{moy}(f_{01})$ des intensités $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i(t)$ représentées sur la figure 6.

En supposant que la tension $u(t)$ reste constante et égale à $U(f_{01})$, calculer $U(f_{01})$.

Vérifier que $|U(f_{01})| \ll V_{1m}(f_{01})$ et $|U(f_{01})| \ll V_{2m}(f_{01})$ et conclure quant à l'hypothèse portant sur la nature des tensions $v'_1(t)$ et $v'_2(t)$.

II.2.5. On se place à la fréquence $f_b = f_{02}$.

Calculer, comme dans la question précédente, la valeur $U(f_{02})$ de la tension $u(t)$.

II.2.6. On suppose que, lorsque la fréquence f_b de $v(t)$ varie entre f_{01} et f_{02} , la variation de tension la tension de sortie U en fonction de f_b est linéaire.

Avec cette hypothèse, tracer, à partir des résultats des questions II.2.4 et II.2.5, la droite modélisant la représentation graphique de la fonction $U(f_b)$.

En déduire que le modèle retenu pour la fonction $U(f_b)$ est de la forme $U = \beta (f_{b0} - f_b)$ et calculer les valeurs numériques de β et de f_{b0} .

Pour la suite du problème, on prendra $\beta = 0,24 \text{ mV/Hz}$ et $f_{b0} = 25 \text{ kHz}$.

II.2.7. Montrer que, compte tenu de la modélisation précédente, le discriminateur peut être décrit par le schéma bloc de la figure 8.

Calculer la valeur numérique de la transmittance K de ce schéma bloc.

II.2.8. En utilisant les résultats des questions I.6, II.1.2, II.1.3 et II.2.7, montrer que la boucle de régulation peut être décrite par le schéma bloc de la figure 9.

Calculer la valeur numérique de la constante K_0 de la figure 9 avec les valeurs numériques des parties I et II.

III. Fonctionnement de la boucle d'asservissement de la fréquence f_b

Dans cette partie, on considérera que la boucle d'asservissement de la fréquence peut être décrite par le schéma bloc de la figure 10, avec $K_o = 650 \text{ rad/s}$ et $\tau_o = 0,50 \text{ ms}$.

Ce schéma est obtenu à partir de celui de la figure 9 en lui adjoignant :

- un amplificateur dont le coefficient d'amplification est G_o ,
- un bloc de transmittance $1/(1 + \tau_o p)$, pour tenir compte des éléments R_o et C_o de la figure 6.

III.1. Etude de la précision de l'asservissement

III.1.1. Calculer la transmittance $T(p) = \frac{F_b(p)}{\mathcal{E}(p)}$ de la chaîne directe.

En déduire l'expression de la transmittance $\frac{\mathcal{E}(p)}{F_{bo}(p)}$ en fonction de G_o , K_o et τ_o .

III.1.2. Dédurre de cette dernière expression l'équation différentielle qui lie la grandeur $\varepsilon(t)$, originale de $\mathcal{E}(p)$, à la fréquence de consigne $f_{bo}(t)$, originale de $F_{bo}(p)$.

III.1.3. Sachant que f_{bo} est constante, calculer l'erreur statique ε_o définie par :

$$\varepsilon_o = \lim_{t \rightarrow \infty} [\varepsilon(t)]$$

En déduire la valeur de l'erreur statique de la mesure de l'altitude z lorsque z reste constante. Quel est, sur la figure 10, l'élément responsable de ce résultat ?

III.2. Etude de la stabilité

III.2.1. Calculer la transmittance complexe $T(j\omega) = E_b / \mathcal{E}$, valable en régime harmonique, en fonction de G_o , K_o et τ_o .

III.2.2. En supposant que $G_o \cdot K_o \cdot \tau_o = 1$, tracer les courbes asymptotiques des diagrammes de Bode : $20 \log |T(j\omega)|$ et $\text{Arg}[T(j\omega)]$. Esquisser les courbes exactes.

III.2.3. Pour quelle pulsation l'argument de $T(j\omega)$ est-il égal à -135° ?

En déduire la valeur maximale du coefficient G_o assurant une marge de phase supérieure à 45° . Sachant que la constante K_o dépend de l'altitude z de l'avion selon la loi $K_o = b/z$, quel est l'inconvénient de ce dispositif ?

Pour y remédier, le constructeur utilise un amplificateur non linéaire dont il fait varier le point de repos en fonction de z . Pouvez-vous justifier ce procédé ?

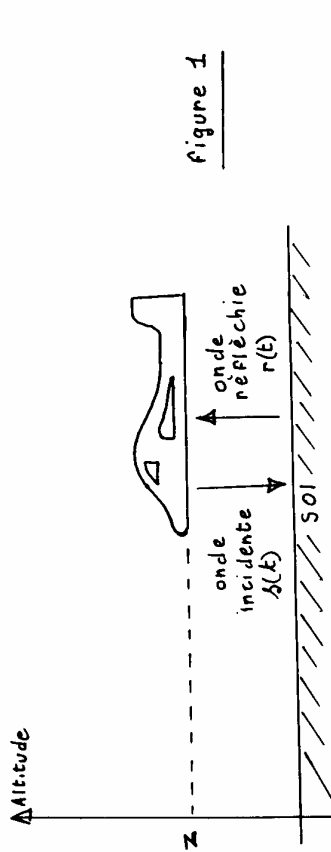


Figure 1

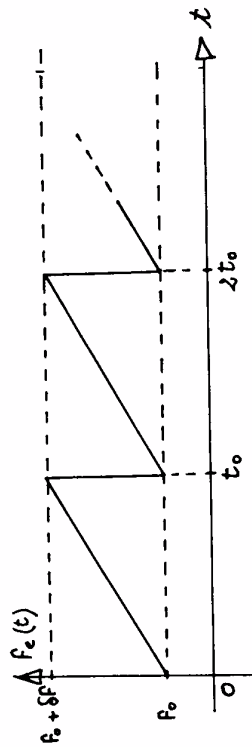


Figure 2

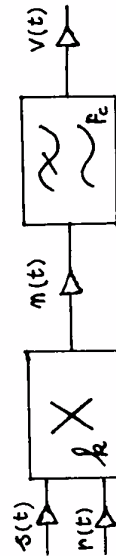


Figure 3

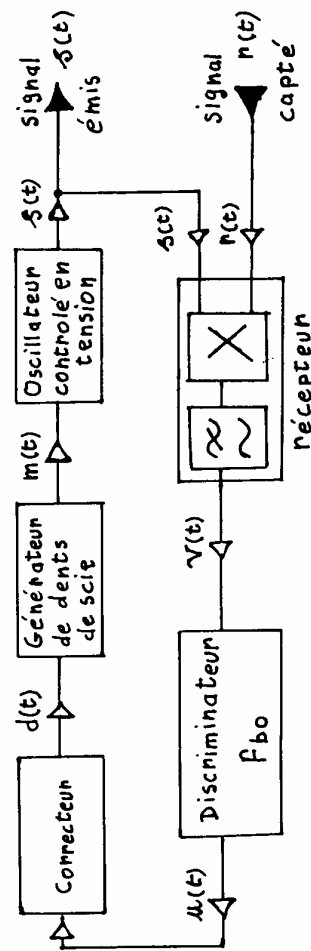


Figure 4

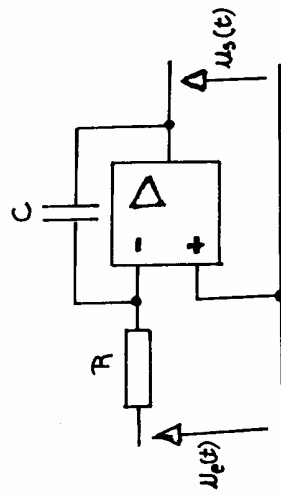


Figure 5

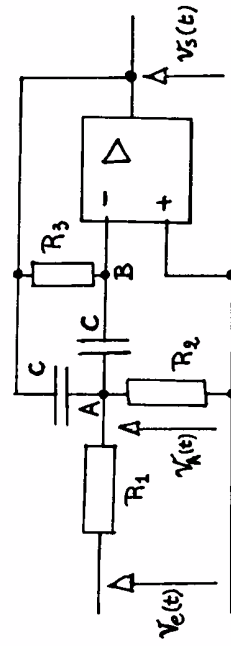


Figure 7

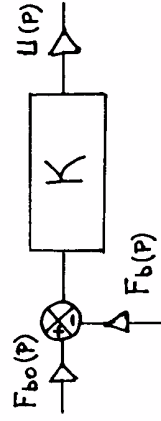


Figure 8

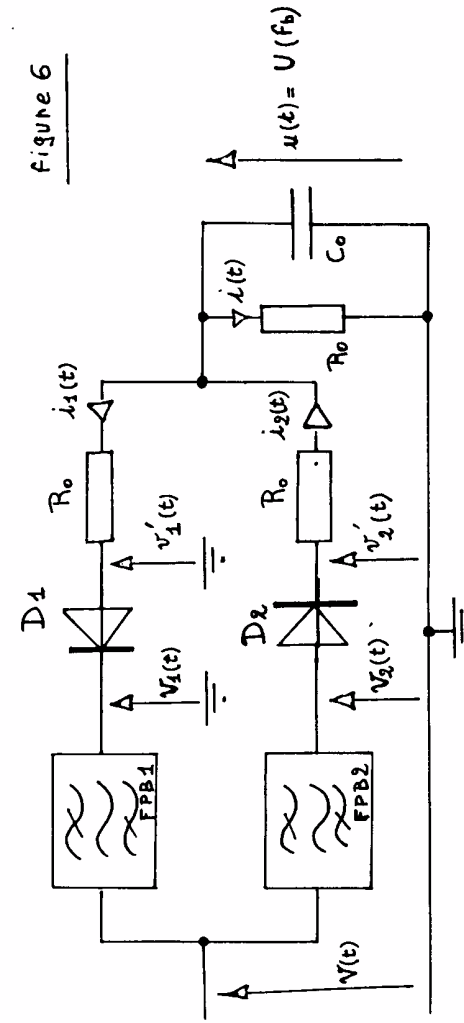


Figure 6

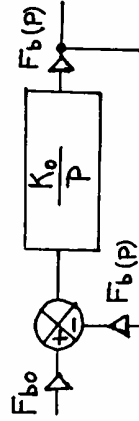


Figure 9

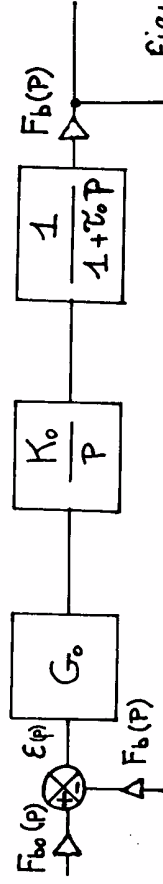


Figure 10