

Enseigne de Physique appliquée

Note aux candidats: Rapports de quelques résultats mathématiques

1. Lorsque le nombre x , réel, est très petit devant l'unité, on peut écrire :

$$(1-x)^2 \approx 1 - x ; \text{ et } \frac{1}{1+kx} \approx 1 - kx.$$

2. Si $p(t)$ est une fonction périodique impaire de la variable t , de période T telle que $T = 2\pi/\omega$, alors $p(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$p(t) = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n \sin(n\omega t)$$

avec :

$$P_0 = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad \text{et} \quad P_n = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \sin(n\omega t) dt$$

A - Première partie (7 points)

On se propose d'étudier un montage utilisé pour contrôler les caractéristiques des triacs.

Pour cela, on considère le circuit représenté sur la figure 1, comportant un condensateur de capacité C , préalablement chargé par connexion à une source de tension stabilisée de f.é.m. E , une bobine qu'on modélise par son inductance L et sa résistance r_1 , une résistance de valeur r_2 , et un triac T .

On pose $r = r_1 + r_2$.

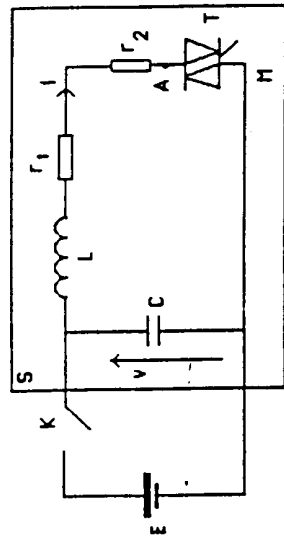


figure 1

Le triac T est amorcé à la date $t=0$. Un courant d'intensité $i(t)$ s'établit alors : $i(t)$ passe par une valeur maximale I_M , puis décroît et s'annule à la date t_1 .

On s'intéresse à la valeur absolue $v = \left| \frac{di}{dt} \right|$ du taux de variation de l'intensité $i(t)$.

On s'intéresse à la date t_1 où le courant s'annule, car, pour certaines valeurs de r , le triac se maintient de lui-même en conduction après le passage par 0 de l'intensité $i(t)$.

Dans cette première partie on se propose de mettre au point, par approximations successives, un modèle mathématique permettant de prédéterminer les valeurs de la f.é.m. E de la source de tension utilisée pour charger le condensateur, de l'inductance L de la bobine et de la capacité C du condensateur, de manière à obtenir les valeurs de r souhaitables.

1. Quelle est, avant l'amorçage du triac, l'énergie électrique W_0 du système S situé à l'intérieur du rectangle de la figure 1 ?

2. En première approximation, on néglige toutes les causes de pertes d'énergie (la conductance du condensateur est supposée nulle, on pose $r_1 = r_2 = 0$, et $v_{MT} = 0$ quand T conduit).

2.1. Préciser les valeurs de $v(t)$ et de $i(t)$ à l'instant initial $t = 0$.

2.2. Montrer, par des considérations énergétiques, que lorsque le condensateur est totalement déchargé, l'intensité i est maximale. Calculer sa valeur maximale I_M en fonction de E , C et L .

2.3. Ecrire l'équation différentielle à laquelle satisfait $i(t)$ entre 0 et t_1 .

2.4. Donner l'expression de $i(t)$ (on posera $LC\omega^2 = 1$). Dessiner l'allure de $i(t)$ pour t variant de 0 à t_1 .

2.5. Etablir les expressions, en fonction de E , C , L , de t_1 , de I_M , et de la valeur efficace I de $i(t)$ entre 0 et t_1 .

2.6. Application numérique: Calculer les valeurs de I_M , de I , et de t_1 pour $E=30V$, $C=100 \mu F$ et $L=10 mH$.

3. On se propose d'évaluer, dans la mesure où elle reste faible devant W_0 , la perte d'énergie W_p du système S au cours de la première alternance du courant; pour cela, on suppose que la forme précédente de $i(t)$ reste inchangée en présence de pertes.

3.1. Montrer que l'énergie perdue entre les dates 0 et t_1 dans la résistance totale r peut se mettre sous la forme:

$$W_p = W_0 \frac{\pi r}{r(LC)}$$

où $f(L, C)$ est une fonction simple de L et de C .

Application numérique : Quelle est la valeur r_{max} de r qui, pour les valeurs numériques données ci-dessus, correspond à une valeur de W_{p1} égale à 10% de l'énergie initiale W_0 ?

3.2. On suppose que pendant que le triac conduit, la tension V_{A1} à ses bornes est constante et l'on note V_d cette tension. Montrer que, dans ces conditions, l'énergie W_{p2} perdue entre 0 et t_1 peut s'écrire sous la forme :

$$W_{p2} = W_0 g \left(\frac{V_d}{E} \right)$$

où g est une fonction simple du rapport (V_d/E) .

Application numérique : Quelle est la valeur E_{min} de E qui correspond à une valeur de W_{p2} égale à 10% de l'énergie initiale W_0 si $V_d = 0,5$ V ?

3.3. On estime la perte d'énergie du système S entre 0 et t_1 par le quantité $W_p = W_{p1} + W_{p2}$ (c'est en cela que réside la modélisation). Montrer que si V_1 désigne la tension aux bornes du condensateur à l'instent t_1 où le courant s'annule, et si on a le fois $r < r_{max}$ et $E > E_{min}$, cette approximation conduit à l'expression :

$$|V_1| = E \left[1 - \frac{\pi r}{2 f(L, C)} - \frac{1}{2} g \left(\frac{V_d}{E} \right) \right]$$

3.4. Etablir la relation entre $|V_1|$ et τ (et les paramètres L et V_d).

En déduire la nouvelle estimation corrigée τ_0 de τ .

Application numérique : calculer la valeur de τ_0 pour $E = 30$ V, $L = 10$ mH, $C = 100$ μ F, $r = 0,2$ Ω , $V_d = 0,5$ V.

B. Deuxième partie (13 points)

Les caractéristiques des triacs, et notamment la valeur limite du coefficient α précédent, varient avec la température.

Pour tester les variations de ces caractéristiques en fonction de la température, on utilise un asservissement de température qui est représenté sur la figure 2.

L'étude qui suit est destinée à modéliser le comportement thermique du système que l'on a observé expérimentalement, elle comprend 4 parties évaluativement indépendantes :

- 1) étude de la mesure de température,
- 2) détermination d'un modèle thermique,
- 3) étude de la commande de la puissance,
- 4) étude du système asservi.

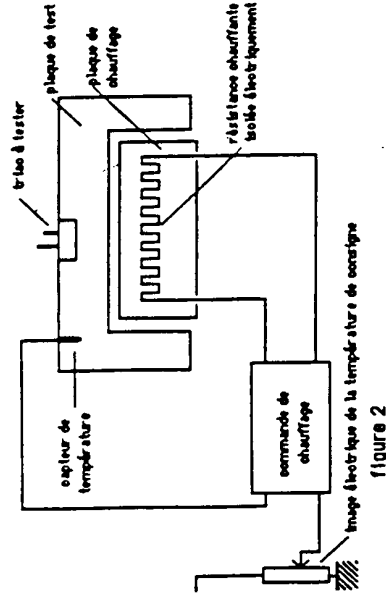


figure 2

1. Etude de la mesure de température.

La chaîne de mesure de la température de la plaque de test utilise comme capteur une résistance de platine de valeur R_{pt} .

En notant θ la température exprimée en degrés celsius, R_{pt} varie selon la loi :

$$R_{pt} = R_0 (1 + \alpha \theta)$$

Dans cette expression, R_0 , résistance à 0°C , vaut 100Ω ; α , coefficient de température, a pour valeur $3,9 \cdot 10^{-3}$.

La résistance R_{pt} est insérée dans le montage représenté sur la figure 3 où l'amplificateur opérationnel est supposé parfait.

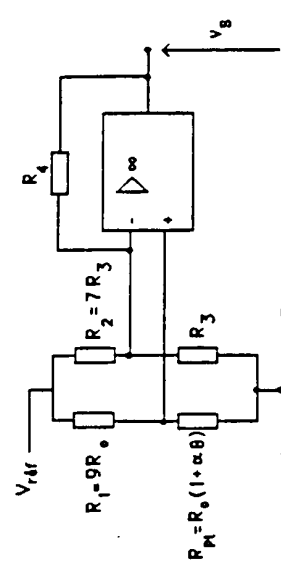


figure 3

1.1. Montrer que ce montage est équivalent à celui de la figure 4.

En effectuant un développement limité au premier ordre, montrer que la f.é.m. équivalente E^+ peut se mettre sous la forme $E^+ = k V_{ref} (1 + \alpha \theta)$.

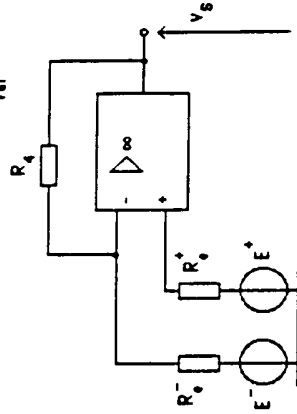


figure 4

Calculer la valeur numérique de k , ainsi que celle de α en fonction de α .

Déterminer l'expression de E^- en fonction de la tension de référence V_{ref} , et de R_4 en fonction de R_3 .

1.2. Etablir l'expression de V_s en fonction de E^+ , R_4 , R_3 , et R_4 .

1.3. Déterminer la valeur du rapport R_4/R_3 puis celle de R_4/R_3 pour que la

tension de sortie V_s soit nulle lorsque la température θ est égale à 0°C .

1.4. En supposant la condition précédente réalisée, déterminer la valeur de V_{ref} pour que V_s soit égale à 10 V lorsque la température θ vaut 200°C .

2. Détermination d'un modèle thermique.

La résistance de chauffage (1) de la figure 5 reçoit une puissance électrique $P(t)$ dont la transformée de Laplace $L[P(t)]$ est notée $P(p)$.

La température θ_3 de la plaque de test (3) est supposée uniforme, comme la température ambiante θ_a . θ_3 varie en fonction du temps t tandis que θ_a est supposée constante.

La transformée de Laplace de la différence $\theta_3(t) - (\theta_a - \theta_s)$ est notée $T_3(p)$.

L'action de la puissance électrique $P(t)$ sur la différence de température $\theta_3(t)$ peut être représentée par la transmittance:

$$H(p) = \frac{T_3(p)}{P(p)}$$

Les températures θ_1 de la résistance de chauffage et θ_2 de la plaque chauffante étant également supposées uniformes, on prend comme modèle thermique du dispositif de chauffage des triacs, un modèle à constantes - localisées qui admet pour analogue électrique le montage représenté sur la figure 6.

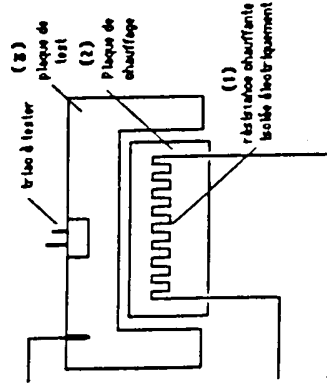


figure 5

Pour ce modèle les mesures ont donné :

$R_{th1} = 2\text{ K/W}$; $R_{th2} = 4\text{ K/W}$; $R_{th3} = 1\text{ K/W}$; $R_{th4} = 0,5\text{ K/W}$;

$C_1 = 50\text{ J/K}$; $C_2 = 400\text{ J/K}$; $C_3 = 1000\text{ J/K}$

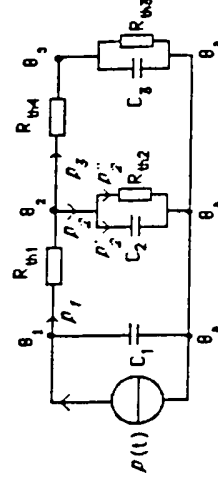


figure 6

2.1. Qualifier R_{th1} , R_{th2} , et C_2 .

2.2. Ecrire les équations des branches et du nœud concernant les puissances thermiques P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 , et P_6 .

2.3. On pose: $\theta_2(t) = (\theta_3 - \theta_a)$; $T_3(p) = L[\theta_3(t)]$; $P_2(p) = L[P_2(t)]$;

$P_3(p) = L[P_3(t)]$; $T_3 = R_{th2} C_2$; $T_5 = R_{th3} C_3$.

Le capacité calorifique C_1 de la résistance de chauffage est, en première approximation, considérée elle-même comme négligeable.

Exprimer $P(p)$ en fonction de $T_2(p)$ et de $T_3(p) \dots$ et de T_3, T_3, R_{02} et R_{03} .

Exprimer $T_2(p)$ en fonction de $T_3(p) \dots$ et de R_{03}, R_{04} et T_3 .

2.4 Le fonction de transfert $H(p)$ peut être mise sous la forme :

$$H(p) = \frac{H_0}{\frac{p}{\omega_0} + 2m \frac{p}{\omega_0} + 1}$$

Avec les valeurs numériques précédentes, on trouve :
 $H_0 = 0,727 \text{ K/W}$; $\omega_0 = 2,62 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$; $m = 1,64$.

Dessiner l'allure des diagrammes de Bode de $H(j\omega)$.

Quelle est la valeur de $H(j\omega)$ pour $\omega = 0$?

2.5. Lorsque la température ambiante θ_a est constante, la représentation graphique de la puissance $p(t)$ a la forme représentée sur la figure 7.

Calculer la valeur moyenne P_m de $p(t)$ en fonction de P_{max} et du rapport cyclique δ .

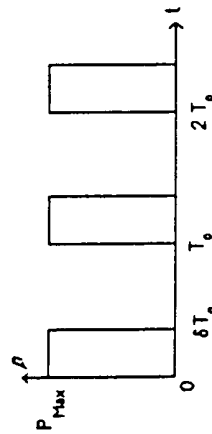


figure 7

Application numérique : $P_{\text{max}} = 300 \text{ W}$; les données de la question précédente restent valables ; calculer δ pour que la valeur moyenne de $\theta_3 = (\theta_3 - \theta_a)$ soit égale à 105°C .

3 Etude de la commande de puissance

Le chauffage est commandé par un comparateur de type "tout ou rien".

Lorsque la température θ_3 de la plaque de test est inférieure à la température

de consigne θ_c , la puissance $p(t)$ est constante et égale à P_{max} ; en revanche lorsque la différence $d = \theta_c - \theta_3$ est négative, la résistance de chauffage n'est pas alimentée (figure 8).

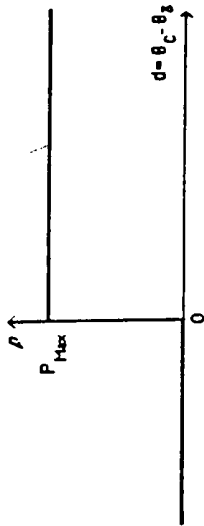


figure 8

Dans le but d'établir un modèle linéaire pour cette fonction non linéaire, on utilise l'approximation du premier harmonique sachant que les harmoniques de $p(t)$ seront fortement atténués par l'inertie thermique du système.

3.1. On suppose ainsi que la différence $d = \theta_c - \theta_3$ est une fonction sinusoïdale du temps, d'expression : $d = D_H \sin \omega t$. Représenter $d(t)$ et $p(t)$ sur le même graphique.

3.2. Calculer l'expression de l'harmonique fondamental $p_1(t)$ de $p(t)$; montrer qu'il est en phase avec $d(t)$. Calculer son amplitude P_{1H} .

3.3. La transformée de Laplace de $d(t)$ est notée $D(p)$, celle de $p_1(t)$ est appelée $P_1(p)$.

Exprimer la fonction de transfert $A_1 = P_1(p) / D(p)$, puis son inverse $1/A_1$ en fonction de D_H .

4 Etude du système asservi

En régime permanent, lorsque θ_a est constante, la température θ_3 oscille autour d'une valeur moyenne fixe, proche de la température de consigne θ_c .

Pour prédéterminer l'amplitude des oscillations de θ_3 , on se place dans le cadre de l'approximation du premier harmonique qui consiste à remplacer la puissance $p(t)$ par son premier harmonique $p_1(t)$, et θ_3 par sa variation $\delta\theta_3$ autour de sa valeur moyenne qu'on supposera pour simplifier égale à θ_c .

Dans ces conditions, le schéma fonctionnel de la chaîne de régulation de température est donné par la figure 9.

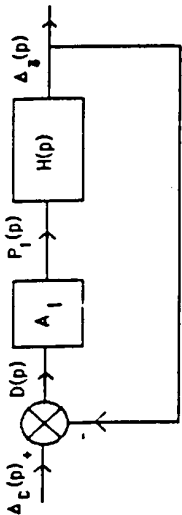


Figure 9

$\Delta_2(p)$ est la transformée de Laplace de $\delta\theta_2(t)$; $\Delta_C(p)$ est la transformée de Laplace de $\delta\theta_C(t)$, variation éventuelle de la tension de consigne θ_C ; A_1 est la fonction de transfert étudiée à la question 3.3.

4.1. Calculer $\Delta_2(p)$ en fonction de $\Delta_C(p)$, de $H(p)$ et de A_1 .

4.2. Ecrire la condition liant A_1 et $H(j\omega_{so})$, pour que le système oscille spontanément à la pulsation ω_{so} , indépendamment de θ_C et de θ_0 .

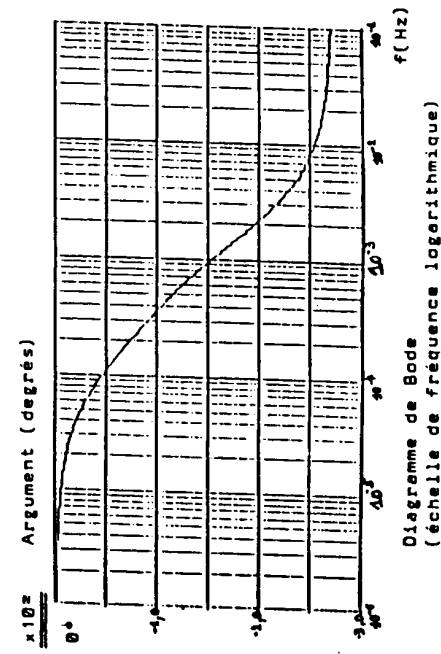
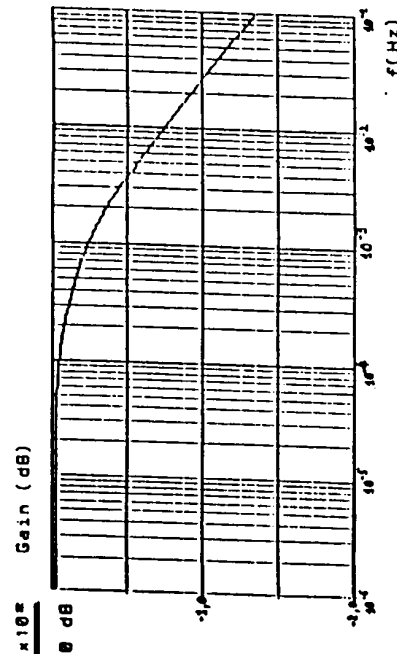
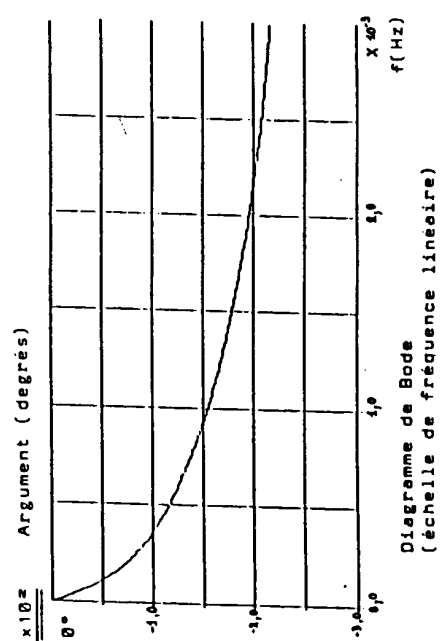
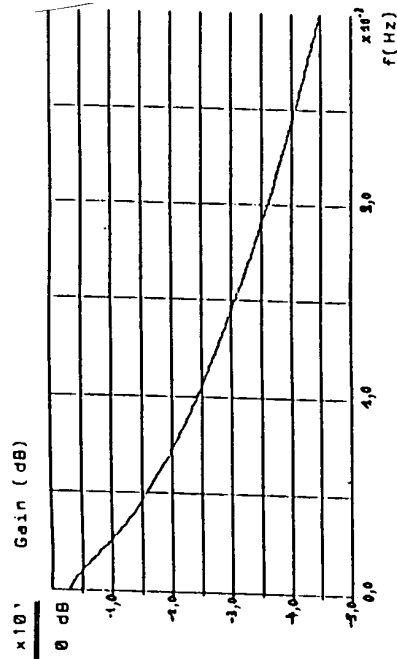
Montrer que si $H(p)$ est la fonction de transfert de la partie 2 (questions 2.2 et 2.3), le système ne peut pas osciller.

4.3. En fait, le système réel oscille car la capacité calorifique C_1 n'est pas négligeable, le système thermique n'est pas un système à constantes localisées etc.

Les diagrammes de Bode et de Nyquist correspondant à la fonction $H(p)$ du système réel ont été tracés expérimentalement. Ils sont donnés respectivement sur les figures 10 et 11.

En utilisant les figures 10 et 11, déterminer la fréquence f_{so} des oscillations du système ainsi que l'amplitude des oscillations de θ_2 , lorsque la température ambiante θ_a et la température de consigne θ_C sont constantes (on prendra encore $P_{max} = 300 \text{ W}$).

Comparer les résultats trouvés au relevé de température de la figure 12.



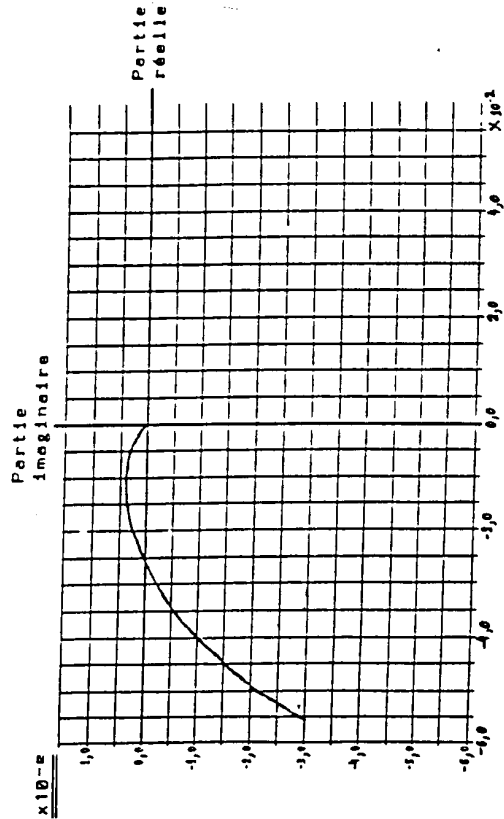
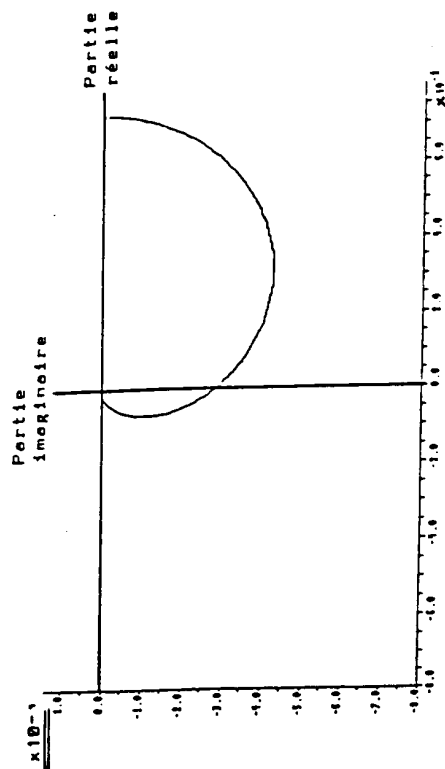


Figure 11

Relevé expérimental de température

Température de consigne : $\theta_c = 125^\circ\text{C}$

Température ambiante $\theta_a = 20^\circ\text{C}$

Puissance maximale de chauffage : $P_{\text{Max}} = 300\text{ W}$

θ_3 : température de la plaque de test, en $^\circ\text{C}$.

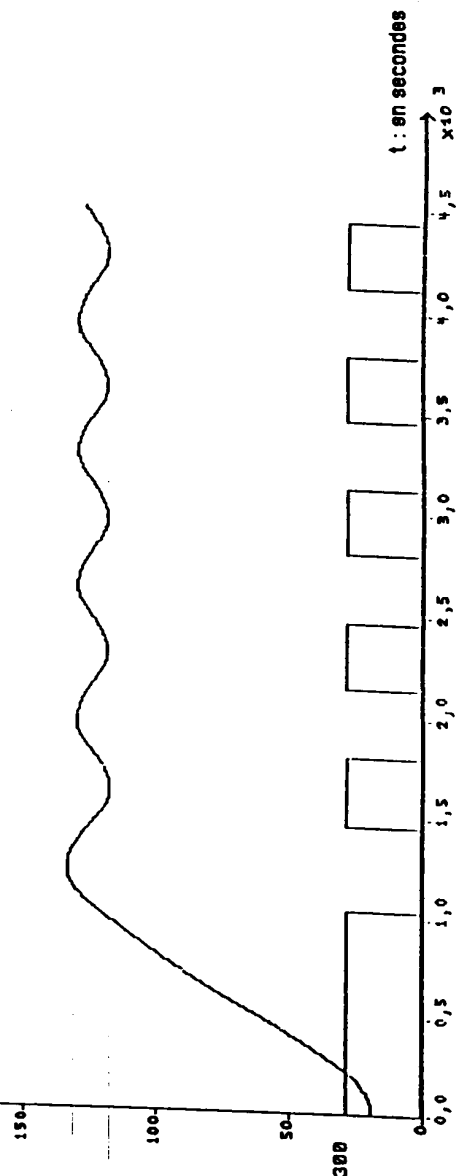


Figure 12