

# SCIENCES PHYSIQUES

Durée : 4 h

Coef. : 4

## CORRECTEUR D'ASSIETTE POUR VEHICULE DE TOURISME

### INTRODUCTION

Le problème porte sur l'analyse d'un système ressort-amortisseur, équipant chaque roue d'une automobile expérimentale et assurant sa suspension.

La liaison élastique entre une roue et la caisse (fonction ressort) est obtenue par compression d'air dans un module de volume variable. C'est une électrovanne, commandée par un système électronique analogique ou numérique, qui injecte plus ou moins d'air dans ce module et en fait alors varier le volume ainsi que la hauteur de la caisse au niveau de la roue. Cette hauteur peut donc être asservie à une consigne.

On se limite à l'étude de la suspension d'une seule roue, supportant une masse fictive égale à une fraction de la masse totale du véhicule.

Les parties du problème sont largement indépendantes.

Les candidats trouveront dans le texte du problème les notions de mathématiques spécifiques nécessaires à sa résolution.

#### 1. Modélisation d'un ressort (figure 1)

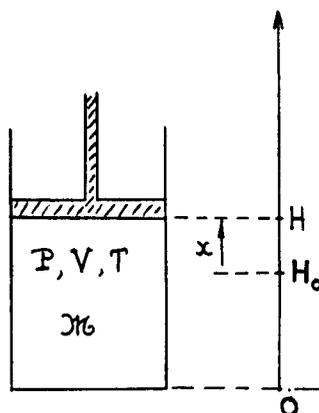


Figure 1

Un piston de section  $S$  comprime de l'air dans un cylindre. On note  $H$  la hauteur variable du volume d'air. Cet air est assimilé à un gaz parfait. Sa pression  $P$ , son volume  $V$  et sa masse  $\mathcal{M}$ , satisfont, pour une température  $T$  que l'on supposera constante, à l'équation :  $PV = b_0 \mathcal{M}$ .

Dans cette expression  $b_0$  est un coefficient numérique de valeur  $b_0 = 84$  lorsque  $\mathcal{M}$  est exprimée en grammes et les autres grandeurs en unités du Système International.

.../...

- 1.1. Exprimer en fonction de  $H$  et de  $\mathcal{M}$  l'intensité de la force  $F$  exercée par l'air comprimé sur la face inférieure du piston.
- 1.2. Afin de rendre les équations linéaires, on ne considèrera, dans tout le problème, que de petites variations des variables  $\mathcal{M}$  et  $H$  autour de leurs valeurs moyennes respectives  $\mathcal{M}_0$  et  $H_0$ . On pose à cet effet  $H = H_0 + x$ , et  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + m$ .

Sachant qu'une fonction  $F(\mathcal{M}, H)$  admet comme développement limité au premier ordre l'expression :

$$F(\mathcal{M}, H) = F(\mathcal{M}_0, H_0) + \left( \frac{\partial F}{\partial \mathcal{M}} \right)_{\substack{\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \\ H = H_0}} (\mathcal{M} - \mathcal{M}_0) + \left( \frac{\partial F}{\partial H} \right)_{\substack{\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \\ H = H_0}} (H - H_0)$$

où  $\frac{\partial F}{\partial \mathcal{M}}$  et  $\frac{\partial F}{\partial H}$  sont les dérivées partielles de  $F$  par rapport, respectivement, à  $\mathcal{M}$  et à  $H$ , montrer que l'on peut écrire  $F = F_0 + b_1 m - b_2 x$ .

Calculer les valeurs numériques de  $F_0$ ,  $b_1$  et  $b_2$  pour  $\mathcal{M}_0 = 14,3 \text{ g}$  et  $H_0 = 0,25 \text{ m}$ .

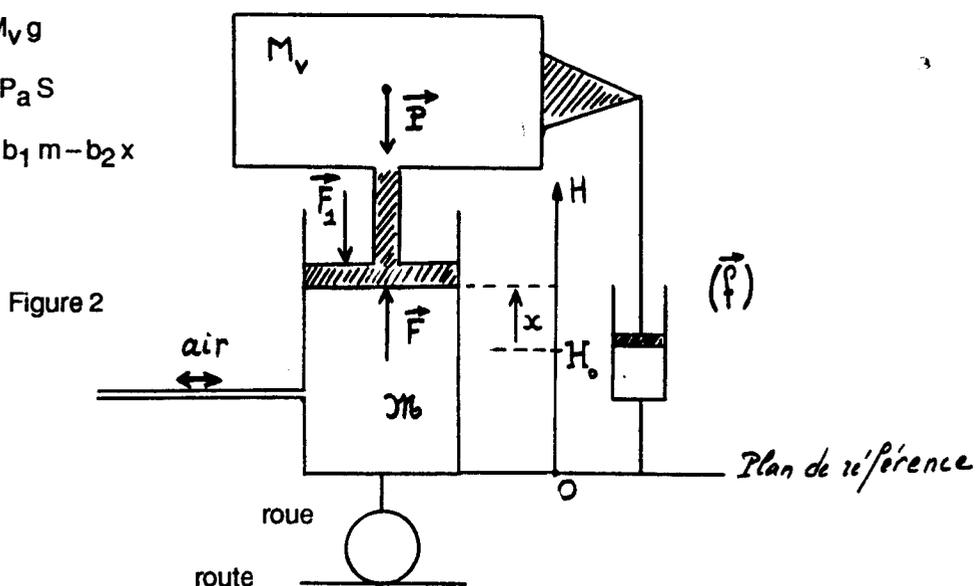
Ces valeurs numériques sont conservées pour toute la suite du problème.

## 2. Etude dynamique du système : masse du véhicule - ressort - amortisseur (figure 2)

$$\|\vec{P}\| = M_V g$$

$$\|\vec{F}_1\| = P_a S$$

$$F = F_0 + b_1 m - b_2 x$$



$M_V$  représente la fraction de la masse du véhicule rapportée à une roue. La masse du piston et celle de l'amortisseur sont négligeables devant  $M_V$ .

L'amortisseur introduit une force  $\vec{f}$  de frottement visqueux dont la projection sur  $Ox$  a pour mesure algébrique  $f = -7,0 \cdot 10^3 \dot{x}$ , expression dans laquelle  $\dot{x}$  représente la dérivée par rapport au temps de la variable  $x$ . Comme  $H_0$  est une constante,  $\dot{x}$  est donc la vitesse du piston ;  $\vec{f}$  est opposée au mouvement.

On note  $P_a$  la pression atmosphérique qui exerce une force  $\vec{F}_1$  sur la partie supérieure du piston. On admettra que l'aire de la surface utile de la partie supérieure du piston est égale à  $S$ .

### 2.1. En utilisant la relation fondamentale de la dynamique :

$M_V \ddot{x} =$  somme des projections sur  $Ox$  des forces appliquées à la partie mobile,  
écrire l'équation différentielle régissant le mouvement de cette partie mobile.

... / ...

2.2.  $M_V = 200 \text{ kg}$  ;  $P_a = 10^5 \text{ N.m}^{-2}$  ;  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$  ;  $S = 2,8 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ .

Montrer que  $H = H_0$  correspond bien à la position de repos de la caisse pour  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0$ .

2.3. Montrer que l'équation différentielle reliant  $x(t)$  et  $m(t)$  s'écrit :

$$\ddot{x} + 35 \dot{x} + 96x = 1,68 m$$

### 3. Etude de l'asservissement analogique de la position de la caisse à une consigne

La masse  $\mathcal{M}$  de gaz enfermé dans le cylindre peut varier autour de  $\mathcal{M}_0$  grâce à une électrovanne qui peut soit introduire de l'air, soit en retirer.

Un capteur fournissant à chaque instant la valeur de la position  $x(t)$ , celle-ci est comparée à une consigne  $c(t)$ . L'électrovanne ajuste alors la masse  $m$  de façon à ce que, même en présence de perturbations,  $x$  diffère le moins possible de  $c$ .

#### 3.1. Transmittance du système de la figure 2

La grandeur d'entrée est la variable  $m = \mathcal{M} - \mathcal{M}_0$  ; la grandeur de sortie est  $x = H - H_0$ . Ces deux grandeurs sont liées par l'équation de la question 2.3.

Etablir, en notation de Laplace, l'expression de la transmittance  $T_1(p) = \frac{X(p)}{M(p)}$  dans laquelle  $X(p)$  et  $M(p)$  sont les transformées de Laplace respectives de  $x(t)$  et  $m(t)$ .

Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme  $T_1 = \frac{\lambda}{(1 - \frac{p}{p_1})(1 - \frac{p}{p_2})}$

Donner les valeurs de  $\lambda$ ,  $p_1$  et  $p_2$ .

#### 3.2. Comportement en fréquence du système de la figure 2

Donner l'allure et les valeurs remarquables du diagramme de Bode pour le module de  $T_1(j\omega)$ .

Le domaine de fréquences que l'asservissement doit traiter ( $f < 5 \text{ Hz}$ ) ainsi que l'étude de la stabilité du montage, montrent que l'on peut prendre pour  $T_1(p)$  une expression approchée qui est celle d'un système de premier ordre.

Montrer que l'on a alors  $T_1(p) = \frac{5,25 \cdot 10^{-2}}{p+3}$ . Cette expression sera utilisée dans toute la suite du problème.

#### 3.3. Système asservi à commande proportionnelle

Le système asservi comportant dans sa chaîne directe l'électrovanne et le système précédant peut être décrit par le schéma fonctionnel de la figure 3.

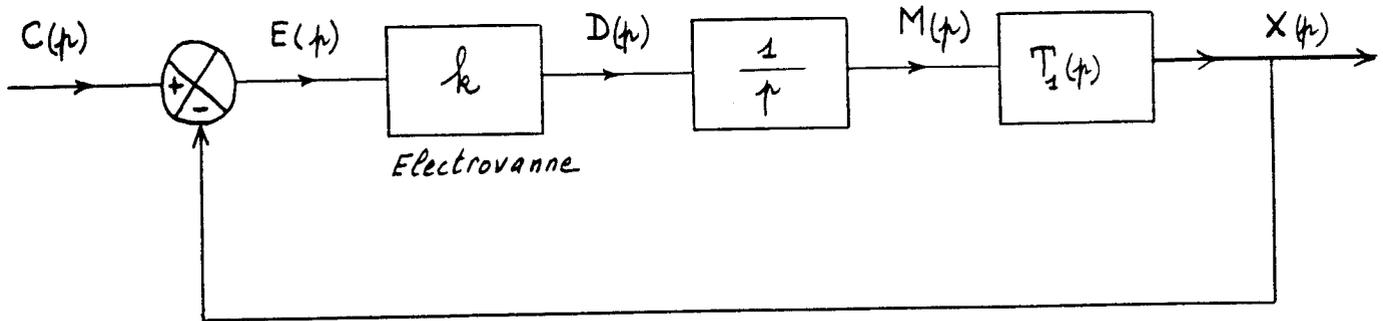


Figure 3

Dans ce schéma fonctionnel, le débit massique d'air de l'électrovanne,  $d(t)$ , est proportionnel au signal d'erreur  $e(t)$  :  $d(t) = k \cdot e(t)$ , soit, en notation de Laplace :  $D(p) = k E(p)$ .

3.3.1. La masse d'air  $m(t)$  et le débit  $d(t)$  sont reliés par la relation  $d(t) = \frac{dm}{dt}$  : la fonction  $d(t)$  est la dérivée par rapport à  $t$  de la fonction  $m(t)$ .

Justifier la présence du bloc fonctionnel de transmittance  $\frac{1}{p}$  dans le schéma de la figure 3.

3.3.2. Donner l'expression de la transmittance de la chaîne directe :  $T_2(p) = \frac{X(p)}{E(p)}$ .

3.3.3. Mettre la transmittance de la boucle fermée,  $T'_2(p) = \frac{X(p)}{C(p)}$

sous la forme 
$$T'_2(p) = \frac{1}{1 + \frac{2\alpha}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Calculer  $\omega_0$  et le coefficient  $k$ , relatif à l'électrovanne pour que le coefficient d'amortissement  $\alpha$  soit égal à 0,5.

Ces valeurs sont conservées dans la suite du problème.

3.3.4. Tracer l'allure du diagramme de Nyquist de la transmittance de boucle  $T_2(j\omega)$  pour  $\alpha = 0,5$ . Pour cela on déterminera : a) la partie réelle de  $T_2(j\omega)$  lorsque  $\omega \rightarrow 0$  ; b) le module de  $T_2(j\omega)$  pour  $\omega = 2,36 \text{ rad/s}$  ; c)  $T_2(j\omega)$  pour  $\omega = \omega_0$  ; d)  $T_2(j\omega)$  lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ .

Comparer la marge de phase du système de la figure 3 à la valeur  $45^\circ$ .

### 3.4. Précision du système de la figure 3

On rappelle que l'erreur de position  $\varepsilon_p$  d'un système asservi à retour unitaire est égale à la valeur limite de l'erreur  $e(t)$ , pour  $t$  tendant vers l'infini, lorsque la consigne  $c(t)$  est une fonction échelon :

$$c(t) = c_0 u(t). \quad (\text{Transformée de Laplace : } C(p) = \frac{c_0}{p})$$

$$\varepsilon_p = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ c(t) = c_0 \cdot u(t)}} e(t)$$

De même l'erreur de traînage  $\varepsilon_T$  est égale à la valeur limite de  $e(t)$ , pour  $t$  tendant vers l'infini, lorsque la consigne est une rampe :

$$c(t) = \dot{c}_0 t u(t). \quad (\text{Transformée de Laplace } C(p) = \frac{\dot{c}_0}{p^2}). \quad \dots / \dots$$

3.4.1. Montrer que l'erreur de position  $\varepsilon_p$  du système précédent est nulle.

On pourra pour cela, soit raisonner sur l'équation différentielle reliant  $x(t)$  et  $c(t)$  qui correspond à la transmittance  $T_2'(p)$  ; soit, après avoir calculé, en notation de Laplace, le rapport  $\frac{E(p)}{C(p)}$ , utiliser le théorème dit de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p E(p)$$

3.4.2. Calculer l'erreur de traînage du système précédent. On exprimera  $\varepsilon_T$  soit en fonction de  $\dot{c}_0$ ,  $\alpha$  et  $\omega_0$ , soit en fonction de  $\dot{c}_0$  et d'un coefficient numérique correspondant aux applications numériques précédentes.

#### 4. Etude de l'asservissement échantillonné réglant la position de la calisse

On désire améliorer la précision de l'asservissement en obtenant une erreur de traînage nulle.

Pour cela on introduit un correcteur dans la chaîne directe, et, compte tenu de la bande passante considérée, correspondant à de faibles fréquences, on choisit un correcteur numérique  $K$ .

Notations : A une fonction  $f(t)$ , l'opération d'échantillonnage fait correspondre la fonction  $f^*(t)$ . On note  $F^*(p)$  la transformée de Laplace de  $f^*(t)$ .

On considérera que le système fonctionne de la manière suivante qui est équivalente au fonctionnement réel :

La consigne est une fonction du temps échantillonnée  $c^*(t)$ , dont la période d'échantillonnage est  $\theta$ .

La position  $x(t)$ , après échantillonnage aux mêmes instants, donne  $x^*(t)$ .

On obtient par différence une erreur échantillonnée  $e_1^*(t)$  qui constitue l'entrée du correcteur  $K$ . (figure 4).

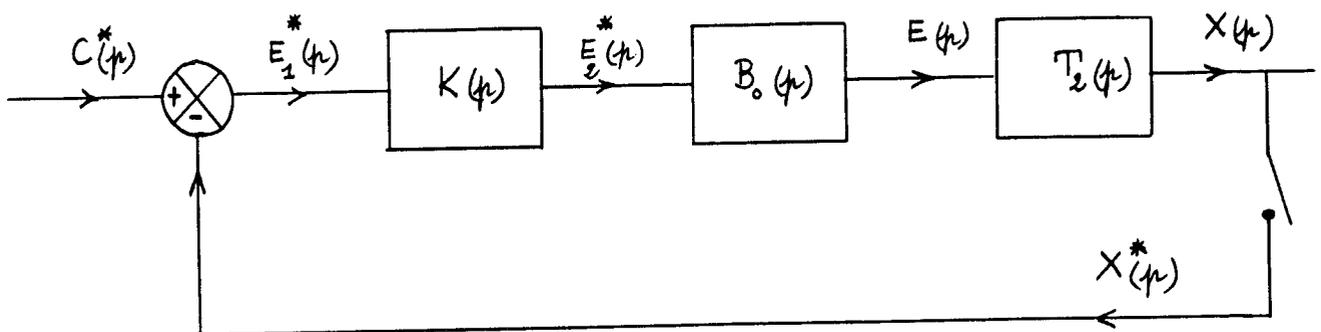


Figure 4

Le correcteur  $K$ , de transmittance  $K(p)$  élabore  $e_2^*(t)$  à partir de l'entrée  $e_1^*(t)$ , et un bloqueur d'ordre zéro, de fonction de transfert  $B_0(p) = \frac{1 - e^{-\theta p}}{p}$ , donne l'erreur corrigée  $e(t)$ .

Cette erreur  $e(t)$  constitue l'entrée de l'électrovanne et donc du système dont la transmittance de la chaîne directe,  $T_2(p)$ , a été étudiée à la question 3.3.2.

On prendra  $T_2 = \frac{9}{p(p+3)}$ .

4.1.1. On met le schéma fonctionnel de la figure 4 sous la forme du schéma de la figure 5 :

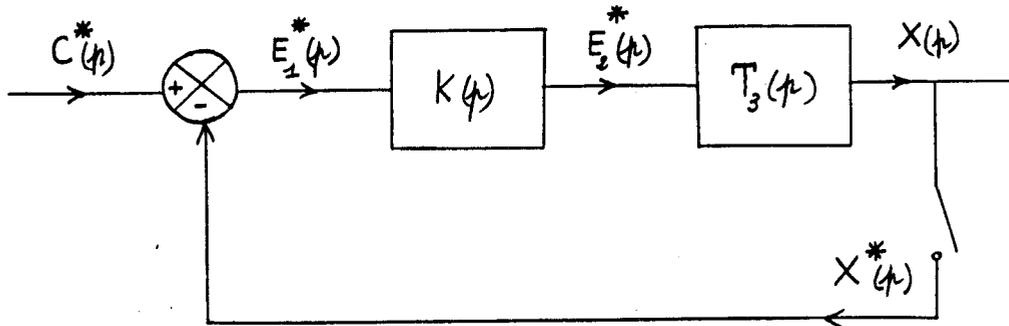


Figure 5

Etablir l'expression de la transmittance  $T_3(p) = \frac{X(p)}{E_2^*(p)}$

4.1.2. En réalité les grandeurs échantillonnées  $c^*(t)$ ,  $e_1^*(t)$ ,  $e_2^*(t)$  et  $x^*(t)$  sont traitées numériquement et l'on note  $C(z)$ ,  $E_1(z)$ ,  $E_2(z)$  et  $X(z)$  les transformées en  $z$  des séquences correspondantes respectives. A l'aide du tableau de correspondance entre transformées de Laplace et transformées en  $z$ , établir l'expression de la transmittance en  $z$  :

$T_3(z) = \frac{X(z)}{E_2(z)}$  (figure 6), que l'on mettra sous la forme  $T_3(z) = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-e^{-3\theta}}$

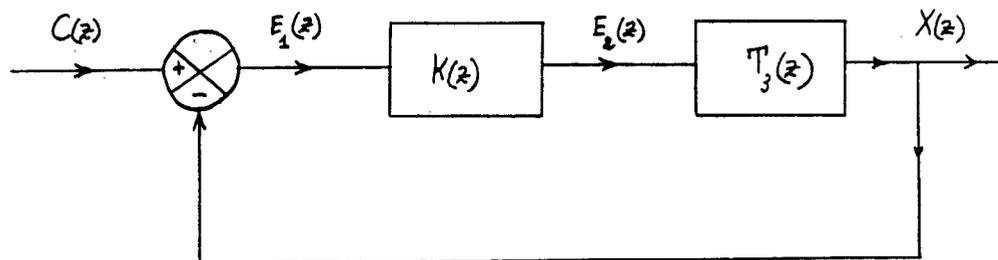


Figure 6

4.2. On admet que l'opération d'échantillonnage n'a pas modifié la stabilité du système, ni sa précision (avec  $K(z) = 1$ , on a toujours une erreur de position  $\epsilon_p$  nulle et une erreur de traînage  $\epsilon_T$  non nulle).

On utilisera les propriétés suivantes :

Un asservissement échantillonné dont la transmittance de la chaîne directe est  $T(z)$ , et dont la période d'échantillonnage est  $\theta$  présente les erreurs de position  $\epsilon_p$  et de traînage  $\epsilon_T$  données par les expressions :

... / ...

$$\varepsilon_P = c_0 \cdot \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1+T(z)} \quad \text{pour une entrée en échelon d'amplitude } c_0.$$

$$\varepsilon_T = c_0 \cdot \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\theta}{(z-1)T(z)} \quad \text{pour une entrée en rampe de pente } \dot{c}_0.$$

Montrer qu'un correcteur de transmittance  $K(z) = \frac{z-a}{z-1}$ , où  $a$  est un nombre réel positif (avec  $0 < a < 1$ ), permet d'obtenir  $\varepsilon_P = 0$  et  $\varepsilon_T = 0$ .

- 4.3. Préciser l'algorithme qui permet au calculateur de réaliser le correcteur numérique de transmittance  $K(z) = \frac{z-a}{z-1}$ . Pour cela,  $e_{1,n}$  et  $e_{2,n}$  représentant les échantillons des grandeurs  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$  à l'instant  $n\theta$  :  $e_{1,n} = e_1(n\theta)$ ,  $e_{2,n} = e_2(n\theta)$ , exprimer  $e_{2,n}$  en fonction de  $e_{2,n-1}$ ,  $e_{1,n}$ ,  $e_{1,n-1}$ , ...

4.4. 
$$\frac{z-a}{z-1} = a + (1-a) \frac{z}{z-1} \quad \text{(on prend } a = 0,74 \text{).}$$

En vous aidant du tableau de correspondance entre transformées, dites à quel type de correcteur analogique le correcteur  $K$  correspond.

- 4.5. Compte tenu du domaine de fréquence considéré ( $f_{\max} < 5$  Hz), proposer une valeur pour la période d'échantillonnage  $\theta$ .

## ANNEXE

Correspondance entre la transformée de Laplace d'un système,  $F(p)$ , et sa transformée en  $z$  :  $F(z)$ .

1°) La correspondance est linéaire : si  $F_1(p) \Leftrightarrow F_1(z)$

$$F_2(p) \Leftrightarrow F_2(z)$$

$$\text{alors : } \lambda F_1(p) + \mu F_2(p) \Leftrightarrow \lambda F_1(z) + \mu F_2(z)$$

2°) La période d'échantillonnage étant  $\theta$ , si  $F(p) \Leftrightarrow F(z)$

$$\text{alors : } e^{-\theta p} F(p) \Leftrightarrow \frac{F(z)}{z}$$

$$e^{-k\theta p} \Leftrightarrow z^{-k}$$

$$1 \Leftrightarrow 1$$

$$\frac{1}{p} \Leftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

$$\frac{1}{p^2} \Leftrightarrow \frac{\theta z}{(z-1)^2}$$

$$\frac{1}{p+a} \Leftrightarrow \frac{z}{z-e^{-a\theta}}$$

$$\frac{1}{(p+a)^2} \Leftrightarrow \frac{\theta z e^{-a\theta}}{(z-e^{-a\theta})^2}$$

$$\frac{a}{p(p+a)} \Leftrightarrow \frac{(1-e^{-a\theta})z}{(z-1)(z-e^{-a\theta})}$$

$$\frac{a}{p^2(p+a)} \Leftrightarrow \frac{\theta z}{(z-1)^2} - \frac{(1-e^{-a\theta})z}{a(z-1)(z-e^{-a\theta})}$$