BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

Session 1999

Epreuve de Mathématiques

Groupe A

Durée : 3 heures

SPECIALITES	COEFFICIENT
Contrôle industriel et régulation automatique	2
Electronique	2
Génie optique	3

- L'exercice 1 (9 points) doit être traité par **tous les candidats**
  Les feuilles 4/9 et 5/9 sont à rendre avec la copie.

- L'exercice 2 (11 points) doit être traité **uniquement** par **les candidats du BTS Génie optique**

- L'exercice 3 (11 points) doit être traité **uniquement** par **les candidats du BTS CIRA et les candidats du BTS Electronique**

Le sujet comprend 9 pages, il est numéroté de 1/9 à 9/9
Les feuilles 4/9 et 5/9 sont à rendre avec la copie.
Le formulaire comprend 6 pages numérotées de 1 à 6

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

Exercice 1 (9 points)

A traiter par tous les candidats des spécialités CIRA - Electronique - Génie optique

PARTIE I

Dans cette partie on établit les résutats mathématiques utiles pour la partie II.

1. Soient α et ω deux réels quelconques et n un entier naturel. Montrer que :
$\cos(n\pi - n\omega\alpha) = (-1)^n \cos(n\omega\alpha)$ et $\cos(n\pi + n\omega\alpha) = (-1)^n \cos(n\omega\alpha)$.

2. Soit T un réel strictement positif et A un réel quelconque. Le nombre α désigne maintenant un réel tel que $0 < \alpha < \frac{T}{4}$.
On considère la fonction g_α, définie sur $\mathbb{R}$, périodique, de période T, telle que :
   - $g_\alpha(t) = 0$ si $t \in [0, \alpha[$
   - $g_\alpha(t) = A$ si $t \in \left[\alpha, \frac{T}{2} - \alpha\right[$
   - $g_\alpha(t) = 0$ si $t \in \left[\frac{T}{2} - \alpha, \frac{T}{2} + \alpha\right[$
   - $g_\alpha(t) = -A$ si $t \in \left[\frac{T}{2} + \alpha, T - \alpha\right[$
   - $g_\alpha(t) = 0$ si $t \in [T - \alpha, T[$

   Donner, pour t variant dans l'intervalle $[0, T[$, une représentation graphique de la fonction g_α.

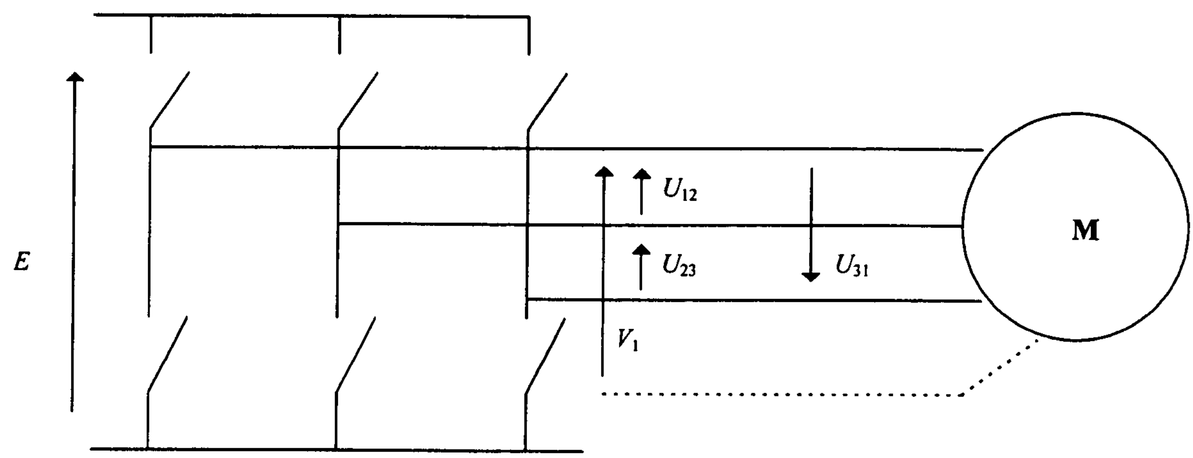
3. On pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
On admettra que les coefficients de Fourier a_n associés à la fonction g_α sont tous nuls.
Calculer les coefficients de Fourier b_n associés à la fonction g_α et montrer que :
$$b_{2p} = 0, \quad p \in \mathbb{N}^*;$$
$$b_{2p+1} = \frac{4A}{\pi} \times \frac{\cos\left[(2p+1)\alpha\,\omega\right]}{2p+1}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

4. On suppose que la fonction g_α vérifie les conditions d'application du théorème de Dirichlet. Soit $t \mapsto S(t)$, la somme de la série de Fourier associée à la fonction g_α. Comparer $S(t)$ et $g_\alpha(t)$ pour t appartenant à l'intervalle $\left[0, \frac{T}{4}\right]$.

PARTIE II

Aucune connaissance d'électricité n'est nécessaire pour résoudre les questions posées dans cette partie

On considère le schéma électrique suivant dans lequel E représente une f.e.m. (force électromotrice) proportionnelle à la fréquence f.



Chaque interrupteur est constitué d'un transistor et d'une diode supposés parfaits. Les intervalles de fermeture ont été réglés pour une période T. Dans ces conditions, les représentations graphiques des tensions U_{12} et U_{31}, qui sont périodiques de période T, sont données, pour t variant dans l'intervalle $[0, T[$, sur le document réponse 1 joint au sujet.

Les lois de l'électricité montrent que :

$$V_1 = \frac{1}{3}(U_{12} - U_{31}).$$

La fonction V_1 est donc périodique de période T.

1. Tracer, en rouge, sur le document réponse 1, la représentation graphique de la fonction V_1 pour t variant dans l'intervalle $[0, T[$.

   Dans toute la suite de l'exercice, le nombre A introduit à la partie I sera pris égal à $\frac{E}{3}$.

2. La fonction g_0 est définie sur $\mathbf{R}$, périodique, de période T et telle que :

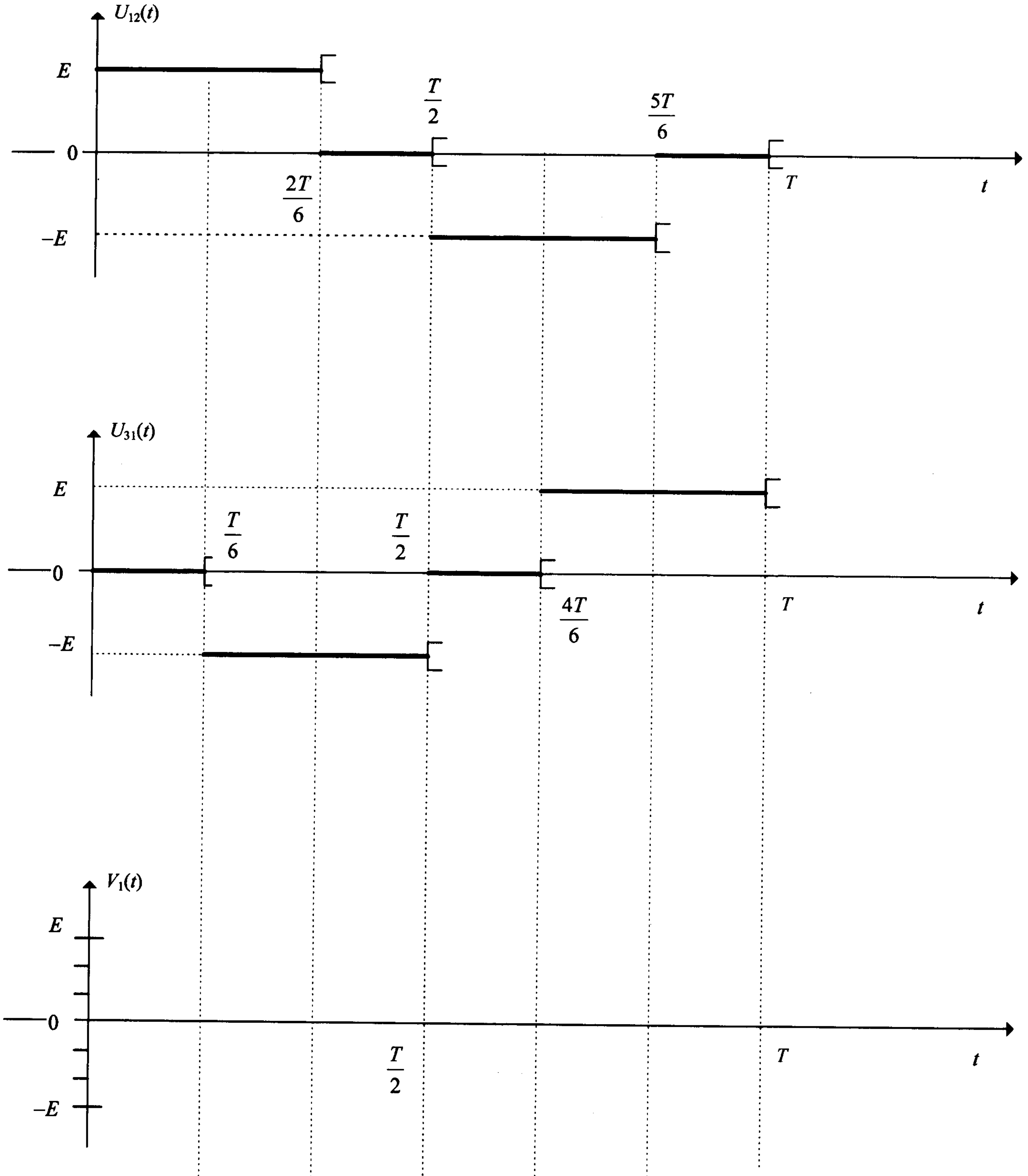
$$g_0(t) = A = \frac{E}{3} \text{ si } t \in \left[0, \frac{T}{2}\right[$$

$$g_0(t) = -A = -\frac{E}{3} \text{ si } t \in \left[\frac{T}{2}, T\right[$$

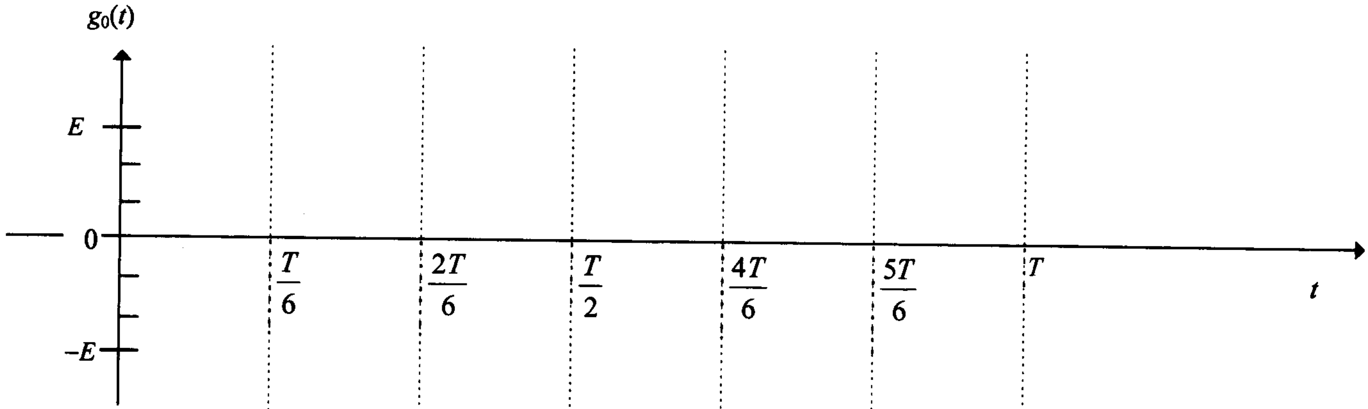
   Construire, sur le document réponse 2, les représentations graphiques des fonctions g_0, $g_{\frac{T}{6}}$ et $g_0 + g_{\frac{T}{6}}$ pour t variant dans l'intervalle $[0, T[$. Comparer alors V_1 et $g_0 + g_{\frac{T}{6}}$.

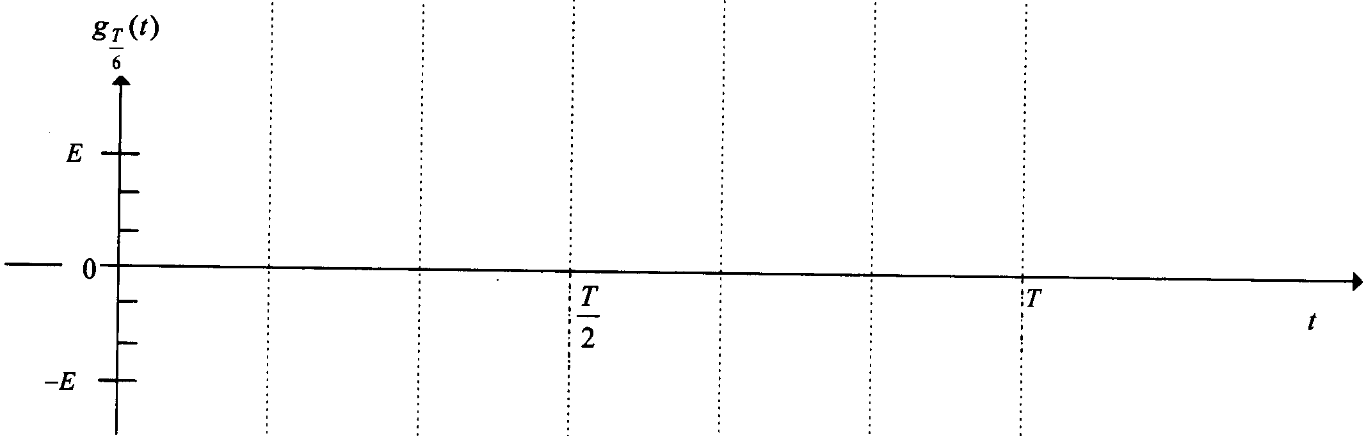
1. On admet que les coefficients de Fourier associés à la fonction g_0 s'obtiennent en donnant la valeur 0 à α dans les coefficients de Fourier associés à la fonction g_α (question 3 de la partie 1). On admet que la série de Fourier associée à la fonction V_1 est la somme de la série de Fourier associée à la fonction g_0 et de la série de Fourier associée à la fonction $g_{\frac{T}{6}}$. En déduire que si l'on prend $T = 2\pi$, l'harmonique de rang 1 (c'est à dire le terme fondamental) de la décomposition en série de Fourier de la fonction V_1 est : $\varphi(t) = \dfrac{2E}{\pi} \sin t$.
2. On note ϕ le maximun de la fonction φ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. On suppose que $E = a \times f$ où a est un réel quelconque. Déterminer la valeur du coefficient a pour que $\dfrac{\phi}{\sqrt{2}} = 220$, sachant que la fréquence est $f = 50$.
Cela signifie que la valeur efficace du fondamental est de 220 V à 50 Hz. Le coefficient a est alors donné en V/Hz.

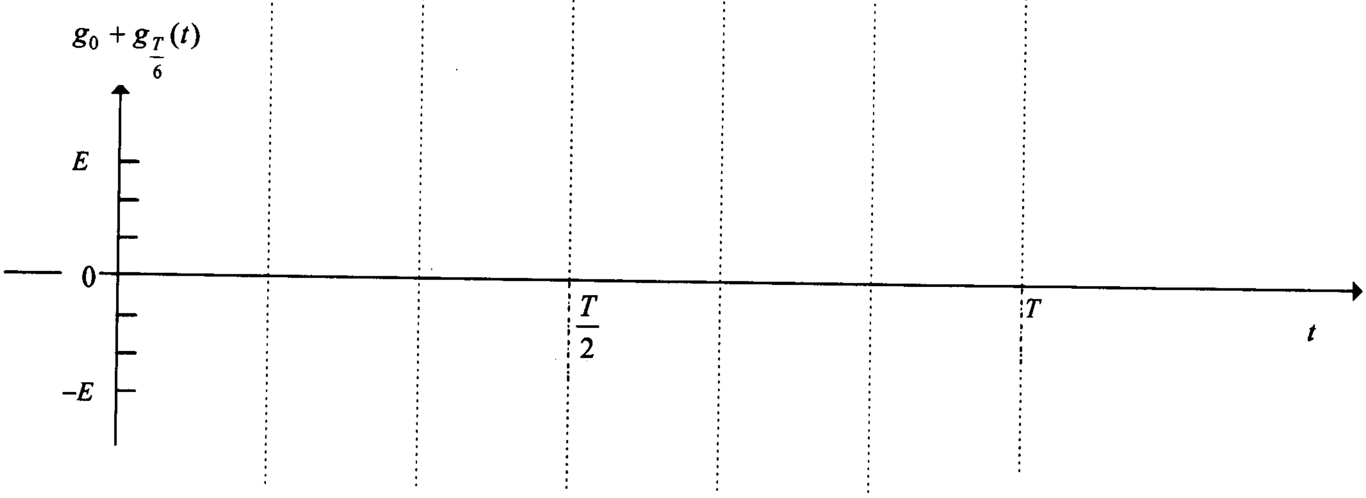
DOCUMENT REPONSE 1
A RENDRE AVEC LA COPIE



DOCUMENT REPONSE 2
A RENDRE AVEC LA COPIE







Exercice 2 (11 points)

A traiter uniquement par les candidats du BTS Génie optique.

PARTIE I

1. On considère l'équation différentielle (E_1) : $X'(t) - X(t) = (2t+1)\,e^t$, où X est une fonction dérivable de la variable réelle t.

a) Déterminer les réels a et b tels que la fonction $t \mapsto (at^2 + bt)e^t$ soit une solution de l'équation différentielle (E_1).

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1).

2. Résoudre l'équation différentielle : $Y'(t) - Y(t) = 2e^t$ où Y est une fonction dérivable de la variable réelle t.

3. On considère le système différentiel noté (S) :

$$(S)\ \begin{cases} X'(t) = X(t) + Y(t) & (1) \\ Y'(t) = Y(t) + Z(t) + e^t & (2) \\ Z'(t) = Z(t) & (3) \end{cases}$$

où X, Y et Z sont des fonctions dérivables de la variable réelle t, vérifiant les conditions initiales : $\begin{cases} X(0) = 1 \\ Y(0) = 1 \\ Z(0) = 1 \end{cases}$

a) Résoudre l'équation différentielle (3) en tenant compte de la condition $Z(0) = 1$.

b) En déduire les solutions du système (S) vérifiant les conditions initiales données.

PARTIE II

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. a) Soit le vecteur $\vec{v}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$.

Calculer $f(\vec{v}_1)$ et en déduire que $\vec{v}_1$ est un vecteur propre de f ; préciser la valeur propre associée.

b) On donne les vecteurs $\vec{v}_2 = -\vec{e}_2$ et $\vec{v}_3 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3$. Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Justifiez que la matrice T de f dans la base $\mathcal{B}'$ est $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. On appelle $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

3. a) Déterminer P^{-1}, matrice inverse de la matrice P (on explicitera les calculs sur la copie).

3. b) Vérifier alors que $T = P^{-1}AP$.

PARTIE III

On considère le système différentiel noté (Σ) : $(\Sigma)\ \begin{cases} x'(t) = -y(t) - z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) + z(t) - e^t \\ z'(t) = x(t) + y(t) + 2z(t) \end{cases}$

où x, y et z sont des fonctions numériques dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant les conditions initiales : $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = -2 \end{cases}$

1. On pose :

$$U = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que le système (Σ) s'écrit $V = AU + B$ où A est la matrice introduite dans la partie II.

2. X, Y et Z désignent des fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$.

On pose : $W = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} X'(t) \\ Y'(t) \\ Z'(t) \end{pmatrix}$.

Les matrices P, U, W, V et Q sont liées par les relations $U = PW$ et $V = PQ$.

a) Montrer que la relation $V = AU + B$ équivaut à $Q = TW + P^{-1}B$ où T est la matrice introduite dans la partie II.

b) En déduire que les fonctions X, Y et Z vérifient le système (S) de la partie I.

c) En déduire les fonctions x, y et z, solutions du système (Σ) et vérifiant les conditions initiales données.

Exercice 3 (11 points)

A traiter uniquement par les candidats des BTS CIRA et Electronique.

L'objet de cet exercice est de déterminer dans la partie A la fonction de transfert d'un filtre, puis de construire le lieu de transfert de ce filtre dans la partie B.

PARTIE A

Le système différentiel régissant un filtre est :

$$(S)\quad \begin{cases} v_s(t) + RC_2 \dfrac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}(t) = f(t) \\ v_e(t) = f(t) + R(C_2 - C_1)\dfrac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}(t) + RC_1 \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) \end{cases}$$

R, C_1 et C_2 sont des constantes réelles strictement positives ; v_s, v_e et f sont des fonctions de la variable réelle t nulles pour t négatif et admettant des transformées de Laplace notées respectivement V_s, V_e et F.
On suppose de plus que $v_s(0^+) = f(0^+) = 0$.

1. Appliquer la transformation de Laplace au système (S).

2. Exprimer $V_e(p)$ en fonction de $V_s(p)$; en déduire l'expression de H, fonction de transfert du filtre, définie par :
$H(p) = \dfrac{V_s(p)}{V_e(p)}$.

3. On pose $\omega_0 = \dfrac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}$ et $m = \sqrt{\dfrac{C_2}{C_1}}$; vérifier que : $H(p) = \dfrac{1}{1 + 2m\dfrac{p}{\omega_0} + \dfrac{p^2}{{\omega_0}^2}}$.

PARTIE B

Le nombre j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$; ω est un nombre réel décrivant l'intervalle $[0; +\infty[$.

On se propose de représenter l'ensemble des points d'affixe $H(\mathrm{j}\omega)$ dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm.

1. On donne $C_1 = 2C_2$ et, pour simplifier les calculs, on pose $s = \dfrac{\omega}{\omega_0}$. Montrer alors que :

$$H(\mathrm{j}\omega) = H(\mathrm{j}\omega_0 s) = h(s) = \frac{1}{1 + \sqrt{2}\mathrm{j}s - s^2}$$

2. Ecrire $h(s)$ sous la forme $h(s) = x(s) + \mathrm{j}y(s)$ où x et y sont deux fonctions de la variable réelle s positive ou nulle.

1. On donne les tableaux de signes suivants (on ne demande pas de les justifier).

s	0		$\sqrt{1+\sqrt{2}}$		$+\infty$
s^4-2s^2-1		$-$	0	$+$	

s	0		$\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$		$+\infty$
$3s^4-1$		$-$	0	$+$	

a) Soit Γ la courbe définie par la représentation paramétrique $\begin{cases} x(s)=\dfrac{1-s^2}{1+s^4} \\ y(s)=\dfrac{-s\sqrt{2}}{1+s^4} \end{cases}$ avec s décrivant l'intervalle $[0;+\infty[$.

Calculer les dérivées des fonctions x et y, puis établir le tableau des variations conjointes des fonctions x et y. On précisera les limites des fonctions x et y en 0 et en $+\infty$ et on se contentera de donner une valeur décimale arrondie à 10^{-2} près des coordonnées des points remarquables.

b) Préciser la direction de la tangente à la courbe Γ aux points de paramètre $s=0$, $s=\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ et $s=\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Tracer alors la courbe Γ dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

SESSION 1999

BTS : groupement A

CONTRÔLE INDUSTRIEL
ET REGULATION AUTOMATIQUE

ELECTRONIQUE

GENIE OPTIQUE

Plusieurs résultats figurant dans ce formulaire ne sont pas au programme de TOUTES les spécialités de BTS appartenant à ce groupement.

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2\sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2\sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2\sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2\cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2\sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$, $\operatorname{ch} t = \frac{1}{2}\left(e^{t} + e^{-t}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$, $\operatorname{sh} t = \frac{1}{2}\left(e^{t} - e^{-t}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \to -\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$	$\text{ch}\, t$	$\text{sh}\, t$
e^t	e^t	$\text{sh}\, t$	$\text{ch}\, t$
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$\text{Arcsin}\, t$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$	$\text{Arc}\tan t$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1+\tan^2 t$	$e^{at} \ (a \in \mathbb{C})$	ae^{at}

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$\left(e^u\right)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \text{ u à valeurs strictement positives}$$

$$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$$

d) Développements en séries entières

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + \cdots$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + \cdots$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + \cdots$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + \cdots$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + \cdots$$

e) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ .... où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique
équation caractéristique :	Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ .... où r est la racine double de l'équation caractéristique
$ar^2 + br + c = 0$	Si $\Delta < 0$, $f(t) = (\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t))e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines
de discriminant Δ	complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

3. SERIES DE FOURIER

f : fonction périodique de période T ;

développement en série de Fourier :

$$\mathrm{f}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t}, \quad (k \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z}).$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t \ ; \qquad a_k = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} \mathrm{f}(t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t \ ; \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} \mathrm{f}(t)\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t .$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} \mathrm{f}(t)\mathrm{e}^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t \ (n \in \mathbb{Z}) \ ; \qquad c_0 = a_0 \ ; \qquad \frac{a_k - ib_k}{2} = c_k \ ; \qquad \frac{a_k + ib_k}{2} = c_{-k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

4. TRANSFORMATION DE LAPLACE

Fonctions usuelles

$$\mathcal{L}(\mathrm{U}(t)) = \frac{1}{p} \ ; \qquad \mathcal{L}(t\,\mathrm{U}(t)) = \frac{1}{p^2} \ ; \qquad \mathcal{L}\left(t^n\,\mathrm{U}(t)\right) = \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}) \ ;$$

$$\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{U}(t)\right) = \frac{1}{p+a} \ ; \ \mathcal{L}(\sin(\omega t)\,\mathrm{U}(t)) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \ ; \qquad \mathcal{L}(\cos(\omega t)\,\mathrm{U}(t)) = \frac{p}{p^2+\omega^2} .$$

Propriétés

$$f(t)\,\mathrm{U}(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} F(p)$$

$\mathrm{f}(\alpha t)\mathrm{U}(t) \qquad \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha}\mathrm{F}\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
$\mathrm{f}(t-\tau)\mathrm{U}(t-\tau)$	$\mathrm{F}(p)\mathrm{e}^{-\tau p}$
$\mathrm{f}(t)e^{-at}\,\mathrm{U}(t)$	$\mathrm{F}(p+a)$
$\mathrm{f}'(t)\mathrm{U}(t)$	$p\,\mathrm{F}(p) - \mathrm{f}(0^+)$
$\mathrm{f}''(t)\mathrm{U}(t)$	$p^2\,\mathrm{F}(p) - p\,\mathrm{f}(0^+) - \mathrm{f}'(0^-)$
$-t\,\mathrm{f}(t)\mathrm{U}(t)$	$\mathrm{F}'(p)$
$\int_0^t \mathrm{f}(u)\mathrm{U}(t)\,\mathrm{d}u$	$\frac{\mathrm{F}(p)}{p}$
$\frac{\mathrm{f}(t)}{t}\mathrm{U}(t)$	$\int_p^{+\infty} \mathrm{F}(u)\,\mathrm{d}u$
$\int_0^t \mathrm{f}(u)\mathrm{g}(t-u)\mathrm{U}(t)\,\mathrm{d}u$	$\mathrm{F}(p)\,\mathrm{G}(p)$
$\mathrm{f}(t)\mathrm{U}(t)$ où f périodique de période T	$\mathrm{F}_0(p)\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-pT}}$ où $\mathrm{F}_0(p) = \int_0^T \mathrm{f}(t)\mathrm{e}^{-pT}\,\mathrm{d}t$

3. PROBABILITES

a) Loi binomiale $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X)=np$ $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\lambda$$

$$V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3032	0,3293
2	0,0163	0,0333	0,0535	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0071	0,0126	0,0198
4		0,0002	0,0007	0,0015	0,0030
5			0,0001	0,0001	0,0003

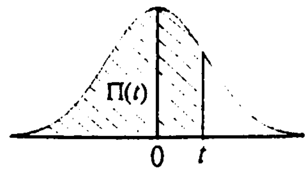
k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.0498	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.000	0.002	0.005	0.013
18									0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.000	0.002
21											0.001
22											0.000

c) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$\Pi(t)=P(T\le t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$



t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 7	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$