BTS Electronique 2001

Exercice 1

Partie A.

1) On a obtenu à l'aide d'une calculatrice :

$$\int_0^{\pi} \sin t \cos t dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi} \sin t \cos(2t) dt = -\frac{2}{3}$$

Justifier ces deux résultats en calculant les intégrales.

2) On considère le signal, modélisé par la fonction e, de période 2π, définie par :

$$\begin{cases} e(t) = \sin t \text{ si } t \in [0;\pi] \\ e(t) = 0 \text{ si } t \in]\pi;2\pi[\end{cases}$$

a. Tracer, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de e pour t variant dans l'intervalle $[-2\pi ; 4\pi]$.

b. Calculer les coefficients de Fourier a_0 , a_1 et a_2 de la fonction e. On admettra pour la suite de l'exercice que les coefficients $b_1 = \frac{1}{2}$ et $b_2 = 0$.

3) Utilisation de la formule de Bessel-Parseval.

a. Calculer E^2 le carré de la valeur efficace du signal e.

b. On sait par ailleurs que la formule de Bessel-Parseval donne :

$$E^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

Dans le cas présent, on décide de ne garder que les harmoniques de rang 1 et 2. On pose alors :

$$P = a_0^2 + \frac{1}{2}\left(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2\right).$$

Calculer P, puis donner une approximation à 10^{-3} près du rapport $\frac{P}{E^2}$.

Partie B.

On se propose maintenant de calculer l'intensité i du courant dans un circuit RC lorsqu'il est alimenté par le signal e défini dans la partie A.
L'équation permettant de trouver l'intensité du courant s'écrit, pour $t \in [0 ; +\infty[$,

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(u)du = e(t) \quad (1).$$

Pour déterminer la fonction i on remplace e par son développement en série de Fourier limité à l'ordre.
L'équation (1) devient alors :

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(u)du = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{2}{3\pi}\cos(2t) \quad (2)$$

On admet que l'intensité i du courant est une fonction dérivable sur $[0 ; +\infty[$. On prend pour toute la suite de l'exercice $R = 5000\Omega$ et $C = 10^{-4}$ F.

1) Montrer que l'équation (2) peut alors se transformer et s'écrire :

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt}(t) + 2i(t) = 10^{-4}\cos(t) + \dfrac{4}{15\pi}10^{-3}\sin(2t) \\ t \in [0\,;+\infty[\end{cases} \quad (3)$$

2) Vérifier que la fonction i_1 telle que $i_1(t) = 4.10^{-5}\cos(t) + 2.10^{-5}\sin(t)$ est une solution de l'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt}(t) + 2i(t) = 10^{-4}\cos(t) \\ t \in [0\,;+\infty[\end{cases}$$

3) Déterminer une solution particulière i_2 de l'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt}(t) + 2i(t) = \dfrac{4}{15\pi}10^{-3}\sin(2t) \\ t \in [0\,;+\infty[\end{cases}$$

4) Résoudre alors l'équation (3). En déduire la solution vérifiant al condition i(0) = 0.

Exercice 2

Le plan complexe P est rapporté au repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

Soit f l'application qui à tout point m de P d'affixe z ($z \neq 1$), associe le point M d'affixe :

$Z = \dfrac{z}{1+z} = 1 - \dfrac{1}{1+z}$.

Partie A.

1) Déterminer l'ensemble D des points d'affixe $\dfrac{-3}{2} + iy$; $y \in \mathbb{R}$.

2) Soit $z_1 = z + 1$. Préciser la transformation géométrique T_1 qui associe à un point m d'affixe z, le point M_1 d'affixe z_1. Quelle est l'image, notée D_1, de D par la transformation T_1?

3) Soit T_2 la transformation géométrique qui au point d'affixe z ($z \neq 0$) associe le point M_2 d'affixe $z_2 = \dfrac{1}{z}$. Quelle est l'image, Γ_2 de D_1 par la transformation T_2 ?

4) Soit T_3 la transformation géométrique qui au point d'affixe z associe le point M_3 d'affixe $z_3 = -z$. Préciser la nature de T_3. Quelle est l'image, notée Γ_3 , de Γ_2 par la transformation T_3 ?

5) Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe $Z = 1 - \dfrac{1}{1+z}$ lorsque $z = -\dfrac{3}{2} + iy$ ($y \in \mathbb{R}$).

6) Représenter sur une même figure les ensembles successivement obtenus D, D_1 , Γ_2, Γ_3, et Γ (unité graphique 2 cm).

Partie B.

1) Soit $z = -\frac{3}{2} + iy$ ($y \in \mathbb{R}$). On remarque que $Z = \frac{z}{1+z}$ peut alors s'écrire $Z = \frac{3-2y}{1-2y}$.

   Montrer que Z possède un argument noté $\varphi(y)$ tel que : $\varphi(y) = \arctan(2y) - \arctan(\frac{2}{3}y)$.

2) Etudier les variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}$ (préciser les limites aux bornes) et en déduire la valeur minimale φ_m de la fonction φ.

3) Utiliser la figure établie au A 6) pour retrouver la valeur de φ_m.