

Brevet de technicien supérieur session 2018 - groupement A

Spécialités :

- Électrotechnique
- Systèmes phoniques
- Techniques physiques pour l'industrie et le laboratoire

Exercice 1

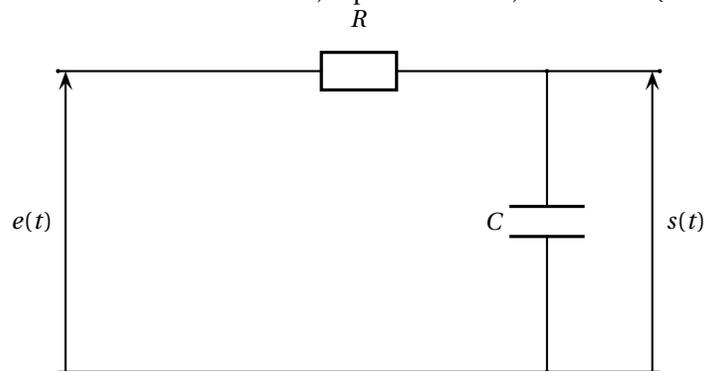
12 points

Un système est modélisé par un circuit composé d'une résistance et d'un condensateur en série.

On note R la valeur de la résistance, en ohm, et C la capacité du condensateur, en farad.

$e(t)$ est la tension aux bornes du circuit, exprimée en volt, à l'instant t (en seconde).

$s(t)$ est la tension aux bornes du condensateur, exprimée en volt, à l'instant t (en seconde).



À l'instant $t = 0$ le condensateur est déchargé et on a : $s(0) = 0$.

L'application des lois de la physique conduit, pour tout $t \geq 0$, à la relation : $RCs'(t) + s(t) = e(t)$ qui s'écrit encore : $\tau s'(t) + s(t) = e(t)$, avec $\tau = RC$.

Dans tout l'exercice, on suppose que : $\tau = 2$ secondes.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Dans cette partie le circuit est alimenté par une tension constante : $e(t) = e_0 = 6$ V.

On considère l'équation différentielle (E) : $2x'(t) + x(t) = 6$, où l'inconnue x est une fonction dérivable de la variable t , t réel positif.

Des formules concernant les solutions des équations différentielles sont données ci-dessous.

1. Déterminer une solution particulière constante x_0 de l'équation différentielle (E).
2. Résoudre l'équation différentielle sans second membre (E_0) : $2x'(t) + x(t) = 0$.
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Justifier que la fonction s vérifie, pour tout $t \geq 0$: $s(t) = 6\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right)$.
5. La représentation graphique de la fonction est donnée sur le **document réponse**.
Pour ce circuit on considère que la tension finale aux bornes du condensateur est de 6 V.
 - a. Que représente cette valeur 6 pour la fonction s ? On n'attend pas de justification.
 - b. Quel pourcentage de la tension finale a-t-on aux bornes du condensateur lorsque $t = 2$?
Arrondir ce pourcentage à l'unité.

6. On considère que le condensateur est chargé lorsque la tension à ses bornes atteint 95 % de la tension finale. On dit alors que le condensateur est passé en régime permanent.
- Estimer graphiquement au bout de combien de temps le condensateur est chargé. Faire apparaître sur le graphique fourni en annexe les traits nécessaires à la lecture graphique.
 - Déterminer par la méthode de votre choix, que vous préciserez, une valeur approchée au centième de la durée nécessaire pour atteindre le régime permanent.

Partie B

On rappelle que la fonction échelon unité est définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} .$$

Dans cette partie, la tension aux bornes du circuit vérifie, pour tout réel t :

$$e(t) = 6\mathcal{U}(t) - 6\mathcal{U}(t - 2).$$

On admet que les fonctions e et s sont des fonctions causales admettant des transformées de Laplace notées respectivement E et S .

Des formules utiles au calcul des transformées de Laplace sont données ci-dessous.

- Représenter la fonction e dans le repère donné sur le **document réponse**.
 - Déterminer $E(p)$.
- On rappelle que pour t différent de 0 et 2 : $2s'(t) + s(t) = e(t)$ et que $s(0) = 0$.
 - Écrire l'égalité obtenue en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'égalité :

$$2s'(t) + s(t) = e(t).$$

- En déduire que : $s(p) = \frac{6}{p(2p+1)} - \frac{6}{p(2p+1)}e^{-2p}$.
- On recherche dans cette question l'original de $A(p) = \frac{6}{p(2p+1)}$.
 - Montrer que : $\frac{6}{p(2p+1)} = \frac{6}{p} - \frac{12}{2p+1}$.
 - Comme $\frac{12}{2p+1} = \frac{6}{p+\frac{1}{2}}$, on peut écrire : $A(p) = \frac{6}{p} - \frac{6}{p+\frac{1}{2}}$.
En déduire l'original $a(t)$ de $A(p)$.
 - En remarquant que $S(p) = A(p) - A(p)e^{-2p}$, déduire des questions précédentes une expression de $s(t)$.
 - On s'intéresse dans cette question à la fonction s sur l'intervalle $[2; +\infty[$.
On admet que pour $t \geq 2$: $s(t) = 6(e-1)e^{-\frac{1}{2}t}$.
 - Étudier les variations de la fonction s sur l'intervalle $[2; +\infty[$.
 - Déterminer la limite de la fonction s quand t tend vers $+\infty$. Justifier.
 - Sur le **document réponse** on a tracé la représentation graphique de la fonction s sur l'intervalle $[0; 2]$.
 - Compléter la représentation graphique de s .
 - Interpréter, dans le contexte de l'exercice, la représentation graphique de la fonction s sur l'intervalle $[0; +\infty[$ obtenue.

EXERCICE 2**8 points**

Une entreprise utilise deux machines A et B pour produire des composants électroniques.

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Un composant est accepté s'il admet une résistance électrique comprise entre 195 et 205 ohms.

On admet que la variable aléatoire R qui, à $W1$ composant prélevé au hasard dans la production de la machine A, associe la valeur exprimée en ohm de sa résistance, suit une loi normale de paramètres $\mu = 200$ et σ .

On prélève au hasard un composant dans la production.

1. On suppose, dans cette question uniquement, que : $\sigma = 3,5$.

Quelle est la probabilité que le composant prélevé soit accepté? Arrondir à 0,01 près.

2. Avec un meilleur réglage de la machine qui ne modifie pas μ , mais qui agit sur σ , on souhaite pouvoir accepter 95 % des composants produits.

a. Quel est la probabilité que : $R \in [\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$? Arrondir à 0,01 près.

b. On rappelle qu'un composant est accepté s'il admet une résistance électrique comprise entre 195 et 205 ohms.

Quelle valeur peut-on donner à σ , en réglant la machine, pour que 95 % des composants produits soient acceptés?

Partie B

La machine B fabrique 40 % des composants produits par l'entreprise. Le reste est produit par la machine A.

On admet que la machine B produit 8 % de composants défectueux et que la machine A produit 5 % de composants défectueux.

On prélève au hasard une pièce dans la production.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.**2. Pour chaque affirmation, une seule des propositions est exacte. Porter sur la copie, sans justification, le numéro de l'affirmation suivi de la valeur choisie.**

Une bonne réponse rapporte 0,5point, une réponse incorrecte ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.

Affirmation 1 : Sachant que la pièce prélevée est produite par la machine B, la probabilité qu'elle ne soit pas défectueuse est :

a. 0,368

b. 0,92

c. 0,08

d. 0,032

Affirmation 2 : La probabilité que la pièce prélevée soit produite par la machine A et qu'elle soit défectueuse est :

a. 0,05

b. 0,92

c. 0,03

d. 0,95

Affirmation 3 : La probabilité que la pièce prélevée soit défectueuse est :

a. 0,938

b. 0,13

c. 0,062

d. 0,065

Affirmation 4 : Sachant que la pièce prélevée est défectueuse, la probabilité qu'elle ait été produite par la machine B est à 10^{-4} près :

- a. 0,516 1 b. 0,032 0 c. 0,080 0 d. 0,483

Partie C

Dans cette partie, on considère qu'il y a 6% de composants défectueux dans la production globale. L'entreprise vend des boîtes contenant 150 composants. La production de l'entreprise étant très importante, on peut assimiler la constitution d'une boîte à une succession de 150 tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui à chaque boîte associe le nombre de composants défectueux que contient la boîte.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Donner ses paramètres.
2. Un client mécontent se présente : il a trouvé 18 composants défectueux dans une boîte. Un commercial de l'entreprise lui répond que moins de 2% des boîtes commercialisées comportent plus de 15 composants défectueux.

Dans cette question, les résultats seront arrondis à 0,001 près.

- a. Déterminer la probabilité qu'il y ait exactement 18 composants défectueux dans une boîte.
 - b. Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins 16 composants défectueux dans une boîte.
 - c. Le commercial a-t-il raison?
3. Estimer le nombre moyen de composants défectueux dans une boîte.

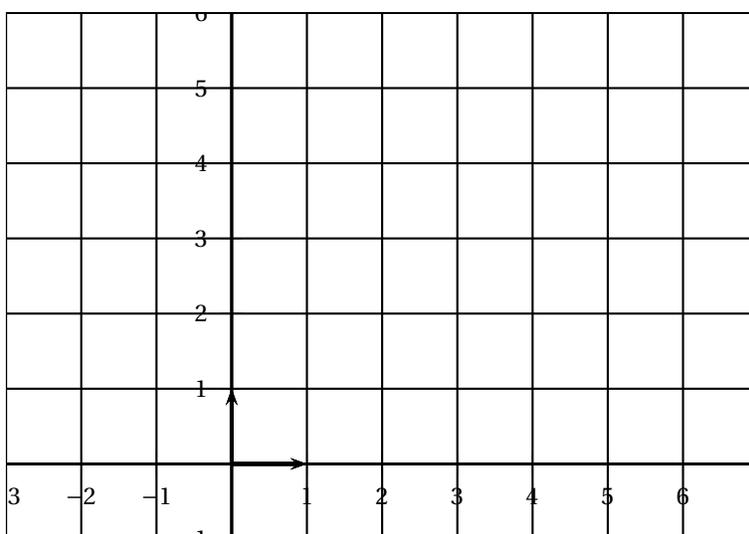
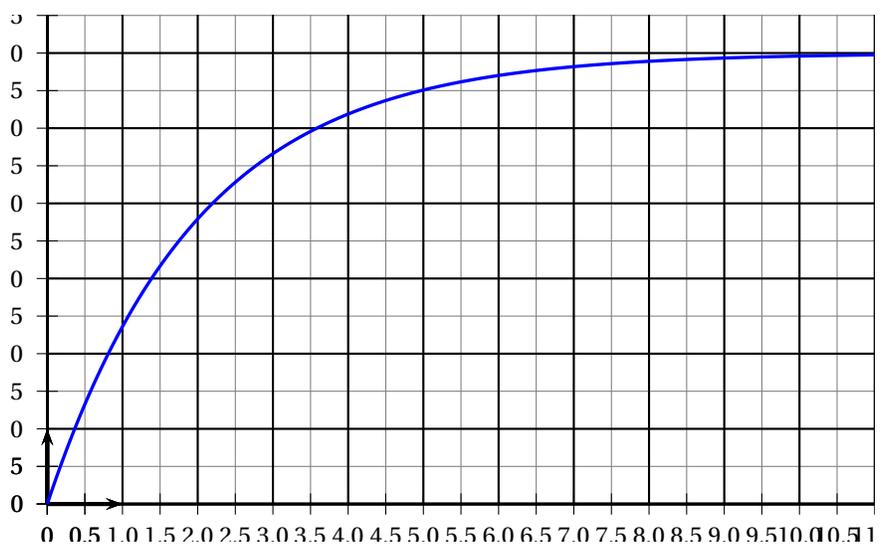
Formules pouvant être utilisées dans l'exercice 1

Équation différentielle sans second membre	Solutions sur \mathbb{R}
$ax' + bx = 0$, avec a constante réelle non nulle et b constante réelle	$t \mapsto ke^{-\frac{b}{a}t}$, avec k constante réelle.

Transformation de Laplace	
Fonction	Transformée de Laplace
$t \mapsto \mathcal{U}(t)$	$p \mapsto \frac{1}{p}$
$t \mapsto \mathcal{U}(t - a)$	$p \mapsto \frac{1}{p}e^{-ap}$
$t \mapsto e^{-at}\mathcal{U}(t)$, avec a constante réelle	$p \mapsto \frac{1}{p+a}$
Propriétés	
Fonction	Transformée de Laplace
$t \mapsto f(t)\mathcal{U}(t)$	$p \mapsto F(p)$
$t \mapsto f(t - a)\mathcal{U}(t - a)$, avec a constante réelle	$p \mapsto F(p)e^{-ap}$
$t \mapsto f(t)e^{-at}\mathcal{U}(t)$, avec a constante réelle	$p \mapsto F(p + a)$
$t \mapsto f'(t)\mathcal{U}(t)$	$p \mapsto pF(p) - f(0^+)$

DOCUMENT RÉPONSE À RENDRE AVEC LA COPIE

EXERCICE 1- Partie A - 5. - Courbe représentative de la fonction s



EXERCICE 1- Partie B - 6. - Courbe représentative de la fonction s 