MATGRA

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

SESSION 2002

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

GROUPE A

CONTROLE INDUSTRIEL ET REGULATION AUTOMATIQUE	2
ELECTRONIQUE	2
ELECTROTECHNIQUE	1
GENIE OPTIQUE	3
INFORMATIQUE INDUSTRIELLE	3

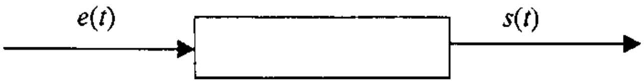
Le sujet comprend 4 pages, numérotées de 1/4 à 4/4.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 6 pages, numérotées de 1 à 6.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

Exercice 1. *(12 points)*

La fonction échelon unité $\mathcal{U}$ est définie par $\mathcal{U}(t) = 0$ si $t < 0$ et $\mathcal{U}(t) = 1$ si $t \geq 0$.

On considère le système « entrée – sortie » représenté ci-dessous :



On note s le signal de sortie associé au signal d'entrée e. Les fonctions s et e sont des fonctions causales, c'est-à-dire qu'elles sont nulles pour $t < 0$. On admet que les fonctions s et e admettent des transformées de Laplace, notées respectivement S et E.
La fonction de transfert H du système est définie par : $S(p) = H(p) \times E(p)$.
On considère le signal d'entrée e défini par :

$$e(t) = t\,\mathcal{U}(t) - 2\,\mathcal{U}(t-1) - (t-2)\,\mathcal{U}(t-2)$$

et la fonction H définie sur $]0, +\infty[$ par $H(p) = \dfrac{1}{p+1}$.

1°) Tracer la courbe représentative de la fonction e dans un repère orthonormal.

2°) Pour $p > 0$, déterminer $E(p)$.

3°) Déterminer les nombres réels A, B, et C tels que, pour tout $p > 0$, on ait :

$$\frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p+1}.$$

On admet que

$$\frac{2}{p(p+1)} = \frac{2}{p} - \frac{2}{p+1}.$$

4°)

4.1. Déterminer $S(p)$ puis $s(t)$.

4.2. En déduire que la fonction s est définie par :

$$\begin{cases} s(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ s(t) = t - 1 + \mathrm{e}^{-t} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ s(t) = t - 3 + \mathrm{e}^{-t}(1 + 2\mathrm{e}) & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ s(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(1 + 2\mathrm{e} - \mathrm{e}^2\right) & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

5°) On rappelle que la notation $f(a^+)$ représente la limite de la fonction f lorsque la variable t tend vers a par valeurs supérieures : $f(a^+) = \lim\limits_{\substack{t \to a \\ t > a}} f(t)$. De même, $f(a^-) = \lim\limits_{\substack{t \to a \\ t < a}} f(t)$.

5.1. Calculer $s(1^+)$, $s(1^-)$, $s(2^+)$, $s(2^-)$. Que peut-on en conclure pour la fonction s lorsque $t = 1$ et $t = 2$?

5.2. Calculer $s'(t)$ sur chacun des intervalles $]0, 1[$, $]1, 2[$ et $]2, +\infty[$.
On admet que s' est strictement positive sur $]0, 1[\cup]2, +\infty[$.
Déterminer le signe de $s'(t)$ sur l'intervalle $]1, 2[$.

5.3. Calculer la valeur exacte de $s(\ln(1+2e))$. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} s(t)$ et dresser le tableau des variations de la fonction s sur $]0, +\infty[$.

5.4. Calculer $s'(1^+)$, $s'(1^-)$, $s'(2^+)$, $s'(2^-)$. On admet que ces nombres sont respectivement les coefficients directeurs des demi-tangentes à droite et à gauche aux points d'abscisse 1 et d'abscisse 2 de la courbe Γ représentative de la fonction s.

6°) On se place dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 5 cm sur l'axe des abscisses et 50 cm sur l'axe des ordonnées.

6.1. Recopier et compléter le tableau suivant dans lequel les valeurs numériques seront données à 10^{-2} près.

t	1	1,2	1,4	1,6	2	2,5	3	3,5
$s(t)$								

6.2. Tracer alors les tangentes ou demi-tangentes à la courbe Γ représentative de la fonction s aux points d'abscisses 0 , 1, et 2. Tracer alors la courbe Γ.

Exercice 2 (*8 points*)

On se propose de résoudre le système différentiel (S) suivant, puis d'en déterminer une solution particulière.

$$(S)\ \begin{cases} x'(t)+2y(t)=-2\sin t & (E1) \\ 2x(t)-y'(t)=-2\cos t. & (E2) \end{cases}$$

Les fonctions x et y sont des fonctions de la variable réelle t, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie A.

1°) Montrer en utilisant les équations $(E1)$ et $(E2)$ que la fonction x vérifie, pour tout t dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle :

$$x''(t)+4x(t)=-6\cos t. \qquad (E)$$

2°) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E). En déduire les solutions du système (S).

3°) Déterminer la solution particulière du système (S) vérifiant les conditions initiales $x(0)=-1$ et $y(0)=0$.

Partie B.

On considère la courbe (Γ) définie par la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = f(t) = \cos(2t)-2\cos t \\ y = g(t) = \sin(2t)-2\sin t, \end{cases}$$

où t est un réel appartenant à l'intervalle $[-\pi, +\pi]$.

1°) Montrer que la courbe (Γ) admet un axe de symétrie en calculant $f(-t)$ et $g(-t)$.

2.1 Calculer $f'(t)$.

Montrer que : $f'(t)=-4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{3t}{2}\right)$.

2.2 Etablir le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.

3°) On admet que $g'(t) = -4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{3t}{2}\right)$ et que le signe de g' est donné par le tableau suivant :

t	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
Signe de $g'(t)$	0	$-$	0	$+$	

Dresser sur l'intervalle $[0, \pi]$ le tableau des variations conjointes des fonctions f et g.

4°) Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe (Γ) aux points B, C et D de paramètre respectifs $t_B = \frac{\pi}{3}$, $t_C = \frac{2\pi}{3}$ et $t_D = \pi$.

5°) Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.
On admet que la tangente à la courbe (Γ) au point A de paramètre $t_A = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{i}$. Tracer les tangentes aux points A, B, C et D puis la courbe (Γ).