MATGRA

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

SESSION 2001

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

GROUPE A

SPECIALITES	COEFFICIENT
ELECTROTECHNIQUE	1
GENIE OPTIQUE	3
TECHNIQUES PHYSIQUES POUR L'INDUSTRIE ET LE LABORATOIRE	3

Le sujet comprend 3 pages, numérotées de 1 à 3.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 6 pages, numérotées de 1 à 6.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

Exercice 1 (12 points)

PARTIE A.

1°) On a obtenu à l'aide d'une calculatrice :

$$\int_0^{\pi} \sin t.\cos t \,\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\pi} \sin t.\cos(2t)\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}.$$

Justifier ces deux résultats en calculant les intégrales.

2°) On considère le signal, modélisé par la fonction réelle e, de période 2π, définie par :

$$\begin{cases} e(t) = \sin t & \text{si} \quad t \in [0,\ \pi] \\ e(t) = 0 & \text{si} \quad t \in]\pi,\ 2\pi[. \end{cases}$$

a) Dans un repère orthogonal, tracer la représentation graphique de la fonction e pour t variant dans l'intervalle $[-2\pi,\ 4\pi]$.

b) Calculer les coefficients de Fourier a_0, a_1 et a_2 de la fonction e. On admettra dans la suite de l'exercice que les coefficients b_1 et b_2 valent : $b_1 = \dfrac{1}{2}$ et $b_2 = 0$.

3°)

a) Calculer le carré E^2 de la valeur efficace du signal e.

b) On sait par ailleurs que la formule de Bessel-Parseval donne :

$$E^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}.$$

Dans le cas présent, on décide de ne garder que les harmoniques de rang 1 et 2.

Soit P le nombre défini par : $P = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\left(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2\right)$.

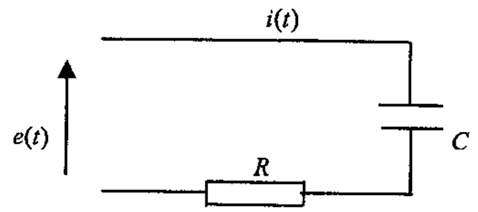
Calculer P, puis donner une approximation décimale à 10^{-3} près du rapport $\dfrac{P}{E^2}$.

La comparaison de E^2 et P justifie que, dans la pratique, on néglige les harmoniques de rang supérieur ou égal à 3.

MATGRA

PARTIE B.

On se propose dans cette partie d'obtenir l'intensité i du courant dans le circuit ci-dessous lorsqu'il est alimenté par le signal d'entrée e défini dans la partie A.



L'équation permettant de trouver l'intensité du courant est, pour $t \in [0, +\infty[$,

$$R\, i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(u)\,\mathrm{d}u = e(t) \qquad (1).$$

Pour déterminer la fonction i on remplace le signal d'entrée e par son développement en série de Fourier tronqué à l'ordre 2. L'équation (1) devient alors :

$$R\, i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{2}{3\pi}\cos(2t) \qquad (2).$$

On admet que l'intensité i du courant est une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$.
On suppose dans toute la suite de l'exercice que $R = 5000\,\Omega$ et $C = 10^{-4}\,\mathrm{F}$.

1°) Montrer que l'équation (2) peut alors se transformer et s'écrire :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + 2\,i(t) = \left(10^{-4}\right)\cos t + \left(\dfrac{4}{15\,\pi}.10^{-3}\right)\sin(2t) \\ t \in [0, +\infty[\end{cases} \qquad (3).$$

2°) Vérifier que la fonction i_1 telle que $i_1(t) = \left(4.10^{-5}\right)\cos t + \left(2.10^{-5}\right)\sin t$ est une solution particulière de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + 2\,i(t) = \left(10^{-4}\right)\cos t \\ t \in [0, +\infty[. \end{cases}$$

3°) Déterminer une solution particulière i_2 de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + 2\,i(t) = \left(\dfrac{4}{15\,\pi}.10^{-3}\right)\sin(2t) \\ t \in [0, +\infty[. \end{cases}$$

4°) Résoudre alors l'équation différentielle (3). En déduire la solution particulière vérifiant la condition $i(0) = 0$.

Exercice 2 (8 points)

Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés à 10^{-4} près.
La question 3 peut être traitée indépendamment des questions 1 et 2.

Une entreprise produit des batteries de téléphone portable. Au cours de la production peuvent apparaître deux défauts indépendants que l'on appellera défaut A et défaut B.
La probabilité que le défaut A apparaisse vaut 0,02 et la probabilité que le défaut B apparaisse vaut 0,01.

1°) Calculer la probabilité qu'une batterie produite soit défectueuse, c'est-à-dire qu'elle comporte au moins un des deux défauts.

2°) On prélève au hasard dans la production un échantillon de 100 batteries. La production est suffisamment importante pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise.
Soit X la variable aléatoire qui à tout échantillon de taille 100 associe le nombre de batteries défectueuses.

a) Quelle est la loi de probabilité que suit la variable aléatoire X ? Donner son espérance mathématique et sa variance.

b) On admet que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson. Quel est le paramètre de cette loi de Poisson ?
En utilisant cette approximation, calculer la probabilité que l'échantillon comporte plus de deux batteries défectueuses.

3°) On s'intéresse dans cette question à la durée de décharge des batteries. On note Y la variable aléatoire qui à tout échantillon de 100 batteries associe la moyenne des durées de décharge.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de paramètre $m = 80$ et $\sigma = 0{,}4$.

a) Calculer la probabilité : $P(79 \leq Y \leq 81)$.

b) Déterminer le réel a tel que : $P(Y \geq a) = 0{,}95$. On donnera la valeur décimale approchée à 10^{-2} près par défaut de a.

c) Calculer la probabilité de l'événement « $(Y \geq 80)$ sachant que $(Y \geq 79{,}34)$ ».