BTS GENIE OPTIQUE 1998
Option PHOTONIQUE INDUSTRIELLE.
Mathématiques
Durée : 3 heures   Coefficient : 3

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul est autorisé.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

EXERCICE 1 :

La fonction échelon unité U est définie par

L'objet de cet exercice est l'étude d'un circuit électrique dans lequel $t \to e(t)$ est la tension d'entrée et $t \to s(t)$ la tension de sortie. Ces deux fonctions sont définies et continues sur $[0 ; +\infty [$.

De plus, la fonction s est deux fois dérivable sur $[0 ; +\infty [$.

Lorsqu'on choisit $e(t) = U(t)$, l'application des lois de l'électricité conduit au système :

où ω_0 et m sont des réels strictement positifs.
On suppose que la fonction s et ses dérivées admettent des transformées de Laplace.
On note S la transformée de Laplace de la fonction s.

1° Appliquer la transformation de Laplace au système et en déduire que, pour tout réel p strictement positif :

2° Dans cette question, m = 1.

a) Trouver trois réels A, B, C tels que, pour tout réel p strictement positif :

b) En déduire s(t) pour t appartenant à $[0 ; +\infty [$.

3° Dans cette question, $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

a) Vérifier que, pour tout réel p strictement positif :

b) En déduire s(t) pour t appartenant à [0 ; +∝ [.

EXERCICE 2 :

Un atelier produit un composant optique en deux phases indépendantes. La première est susceptible de faire apparaître un défaut α sur 2 % des composants, la seconde un défaut β sur 4 % des composants.

1° On prélève un composant au hasard dans la production.
On appelle A l'événement :"le composant présente le défaut α" et B l'événement "le composant présente le défaut β".
Calculer à 10^{-4} près, la probabilité des événements suivants :

a) Le composant présente les deux défauts.

b) Le composant ne présente aucun des deux défauts.

c) Le composant présente au moins un des deux défauts.

d) Le composant présente un et un seul des deux défauts.

2° On souhaite déterminer la probabilité que sur un échantillon de 200 composants prélevés au hasard dans la production, 10 présentent le défaut α.
On tire au hasard 200 composants. Le nombre de composants produits est suffisamment grand pour que ces tirages puissent être assimilés à des tirages indépendants.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 200 composants tirés, associe le nombre de composants présentant le défaut α .

a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? En préciser les paramètres.

b) On décide d'approcher cette loi par la loi de Poisson de paramètre 4.
Justifier la valeur du paramètre.

c) On note Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre 4.
Calculer P(Y = 10).
Donner ce résultat avec la précision de la table.

3° On tire au hasard 800 composants. Le nombre de composants produits est suffisamment grand pour que ces tirages puissent être assimilés à des tirages indépendants.
On note Z la variable aléatoire qui, à chaque lot de 800 composants tirés, associe le nombre de composants présentant le défaut β.

a) Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ? En préciser les paramètres.

b) On décide d'approcher cette loi par la loi normale de paramètres : $m = 32$ et $\sigma = 5{,}54$.

Justifier la valeur de ces paramètres.

c) On note T une variable aléatoire suivant la loi normale $N(32 ; 5{,}54)$.

Avec la précision donnée par la table, calculer les probabilités suivantes :

$P(T < 30)$,
$P(20 < T < 40)$
$P(T < 40$ sachant que $T > 20)$.

EXERCICE 3 :

Dans cet exercice, aucune connaissance de physique n'est nécessaire.

On note j le nombre complexe de module 1, dont un argument est $\frac{\pi}{2}$.

Partie A

1° Déterminer les réels a et b tels que $(a + j\,b)^2 = -9 + 12\,j$.

2° Déterminer, sous forme algébrique, les solutions de l'équation :

$$z^2 - (2 + 3\,j)\,z + 1 = 0.$$

Calculer leur module. En donner une approximation décimale à 10^{-1} près.

Partie B

On représente un quadripôle de la façon suivante :

où V_e et i_e sont respectivement la tension et l'intensité d'entrée, V_s et i_s la tension et l'intensité de sortie correspondantes.

Dans cette partie, on étudie le quadripôle Q représenté par le schéma suivant :

Les grandeurs d'entrée et de sortie vérifient les relations :

où R, C et ω sont des nombres réels strictement positifs.

1° Ecrire la matrice de transfert T du quadripôle Q définie par la relation :

Vérifier que le déterminant de T est 1.

2° Le but de cette question est de calculer l'impédance caractéristique Z_c du quadripôle Q.

a) Démontrer que les valeurs propres λ de la matrice T sont les solutions dans C de l'équation :

$$\lambda^2 - (2 + j\,RC\omega)\,\lambda + 1 = 0 \quad (E).$$

On ne demande pas, dans cette question, de résoudre l'équation (E).

Montrer que 1 n'est pas solution de l'équation (E).

b) Soit $\begin{pmatrix} V_e \\ i_e \end{pmatrix}$ un vecteur propre de T associé à une valeur propre λ et $\begin{pmatrix} V_s \\ i_s \end{pmatrix}$ le vecteur de sortie correspondant.

Vérifier que

c) Application numérique :

On suppose $R = 10^4$ et $RC\omega = 3$.

Donner la solution de l'équation (E) dont le module est inférieur à 1. On la note λ_c.

Calculer $Z_c = \dfrac{R}{1+\lambda_c}$ et en donner la forme algébrique.