SESSION 2008

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

ELECTROTECHNIQUE	1	3
GENIE OPTIQUE	3	3

MATHEMATIQUES

Le sujet comprend 5 pages, numérotées de 1 à 5.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 7 pages, numérotées de 1 à 7.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

Code sujet
MATGRA2

Exercice 1 (11 *points*)

On rappelle que la fonction échelon unité, notée U, est définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$\begin{cases} U(t)=0 & \text{si } t<0 \\ U(t)=1 & \text{si } t\geq 0 \end{cases}$$

Une fonction définie sur **R** est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$.

1. On considère la fonction causale e définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$e(t)=4[U(t)-U(t-2)].$$

a) Tracer la représentation graphique de la fonction e dans un repère orthonormal.

b) On note E la transformée de Laplace de la fonction e.
Déterminer $E(p)$.

2. On considère la fonction s telle que :

$$4s'(t)+s(t)=e(t) \text{ et } s(0)=0.$$

On admet que la fonction s possède une transformée de Laplace, notée S.

Démontrer que :

$$S(p)=\frac{1}{p\left(p+\frac{1}{4}\right)}\left(1-\mathrm{e}^{-2p}\right).$$

3. Déterminer les nombres réels a et b tels que :

$$\frac{1}{p\left(p+\frac{1}{4}\right)}=\frac{a}{p}+\frac{b}{p+\frac{1}{4}}$$

4. Compléter le tableau ci-dessous dans lequel f désigne la fonction causale associée à F :

$F(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-2p}$	$\frac{1}{p+\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{p+\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-2p}$
$f(t)$	$U(t)$			

5. a) Déterminer $s(t)$, t désignant un nombre réel quelconque.

b) Vérifier que :

$$\begin{cases} s(t)=0 & \text{si } t<0 \\ s(t)=4-4\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} & \text{si } 0\leq t<2 \\ s(t)=4\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-1\right) & \text{si } t\geq 2 \end{cases}$$

6. **a)** Justifier que la fonction s est croissante sur l'intervalle $[0;2[$.

   b) Déterminer $\lim\limits_{\substack{t \to 2 \\ t<2}} s(t)$.

7. **a)** Déterminer le sens de variation de la fonction s sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

   b) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} s(t)$.

8. Tracer la courbe représentative de la fonction s dans un repère orthonormal.

Exercice 2 (9 *points*)

Dans ce problème, on approche un signal à l'aide d'une fonction affine par morceaux.

On désigne par E un nombre réel de l'intervalle $]0\,;3[$.

On considère la fonction f définie sur **R**, **paire**, périodique de **période 5**, telle que :

$$f(t)=\begin{cases} E\times t & \text{si } 0\leq t<1 \\ (3-E)\,t+2E-3 & \text{si } 1\leq t<2 \\ 3 & \text{si } 2\leq t\leq \dfrac{5}{2} \end{cases}.$$

Partie A :

Dans cette **partie, et uniquement dans cette partie**, on se place dans le cas où $E = 2$.

1. Préciser l'écriture de $f(t)$ sur chacun des intervalles $[0\,;1[$, $[1\,;2[$ et $\left[2\,;\dfrac{5}{2}\right]$.
2. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-5\,;10]$.

Partie B :

Dans cette **partie**, on se place dans le **cas général**, c'est-à-dire dans le cas où la valeur de E n'est pas spécifiée.

On appelle S la série de Fourier associée à la fonction f.

On note $S(t)=a_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)+b_n\sin\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\right)$.

1. Montrer que la valeur moyenne de la fonction f sur une période est $a_0=2\dfrac{E+3}{5}$.
2. Déterminer b_n pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1.
3. **a)** Montrer que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$\int_0^1 t\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\mathrm{d}t=\frac{5}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{5}\right)+\frac{25}{4n^2\pi^2}\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)-1\right).$$

b) On a calculé les intégrales $\int_1^2 f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\mathrm{d}t$ et $\int_2^{\frac{5}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\mathrm{d}t$.

On a ainsi obtenu, pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\mathrm{d}t = \frac{25}{4n^2\pi^2}\left((2E-3)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)+(3-E)\cos\left(\frac{4n\pi}{5}\right)-E\right).$$

En déduire que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$a_n = \frac{5}{n^2\pi^2}\left((2E-3)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)+(3-E)\cos\left(\frac{4n\pi}{5}\right)-E\right).$$

4. Pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1, on appelle u_n l'harmonique de rang n.

On a alors $u_n(t) = a_n\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)+b_n\sin\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)$ pour tout nombre réel t.

a) Montrer qu'au rang 5, $u_5(t)$ est nul pour tout nombre réel t.

b) On appelle E_0 la valeur de E pour laquelle l'harmonique de rang 3 est nulle, c'est-à-dire la valeur de E telle que $u_3(t)$ est nul pour tout nombre réel t.
Déterminer la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de E_0.

Dans ce problème, à l'aide d'un transformateur à diode, on approche un signal sinusoïdal redressé par une fonction affine par morceaux.
Un tel signal avec $u_3(t)=u_5(t)=0$ permettra :

- ✓ *s'il est associé à un moteur, de réduire les à-coups du couple*
- ✓ *s'il est associé à un transformateur, d'éviter des pertes*
- ✓ *s'il est associé à un filtre, d'éliminer plus facilement les harmoniques de rang impair d'ordre supérieur.*