EXERCICE 1 **(10 points)**

Les buts de l'exercice sont :
- la détermination de la fonction f, définie sur l'ensemble R des nombres réels, dont la courbe représentative (Γ), dans un repère orthogonal $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$, est tracée sur la feuille annexe (unités graphiques : 2 cm en abscisse ; 1 cm en ordonnée),
- le calcul de l'aire du domaine hachuré (cf. feuille annexe).

On considère les quatre points A (0 ; 3), B(-1 ; 4), C(-3 ; 0), D(1 ; 0,5) de la courbe (Γ) et la droite (Δ), tangente à (Γ) au point D (qui passe par le point F(0 ; 3,5)).

Partie A :

On cherche d'abord une fonction polynôme g, définie sur R par $g(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois nombres réels à déterminer pour que la courbe représentative (P) de g passe par les points A, B et C.

1) a) Montrer que la condition "C appartient à la courbe (P)" conduit à l'équation : $9a - 3b + c = 0$.

b) En procédant de même pour A et B, déterminer un système de trois équations à trois inconnues vérifié par a, b et c.

c) Résoudre ce système et vérifier que $g(x) = -x^2 - 2x + 3$.

2) On désigne par g' la fonction dérivée de g, et par g'' sa fonction dérivée seconde.

Vérifier que, pour tout x appartenant à R,

$$g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) = -2x^2 + 2x + 10.$$

Partie B :

On admet que f, représentée par (Γ), est une solution de l'équation différentielle

$$\text{(E)} \quad y'' - 3y' + 2y = -2x^2 + 2x + 10,$$

dans laquelle y est une fonction de la variable x, définie et dérivable à l'ordre deux sur R.

1) a) Donner une solution particulière de (E).

b) Résoudre l'équation différentielle :

$$\text{(E')} \quad y'' - 3y' + 2y = 0.$$

c) Déterminer la solution générale de (E).

2) Préciser, à l'aide des données initiales, les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

En déduire que, pour tout x appartenant à R, $f(x) = -x^2 - 2x + 3 + \frac{1}{2}e^{2(x-1)}$.

3) Calculer l'aire, en cm^2, du domaine hachuré sur la figure : $\begin{cases} -2 \leq x \leq -1 \\ 0 \leq y \leq f(x). \end{cases}$

On donnera la valeur exacte de cette aire, puis sa valeur décimale arrondie au mm^2.

EXERCICE 2 **(10 points)**

Une entreprise de décolletage fabrique des injecteurs. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque injecteur tiré au hasard dans la production, associe son diamètre intérieur, exprimé en millimètres ; on admet que X suit une loi normale, de paramètres m et σ .

1) Des séries d'essais ont permis à l'entreprise de constater que m=0,65 et σ =0,02.

a) Un injecteur est accepté si son diamètre intérieur X appartient à l'intervalle [0,61 ; 0,70]. Calculer la probabilité qu'un injecteur tiré au hasard dans la production de l'usine soit accepté.

b) Déterminer un intervalle, de centre m=0,65, tel qu'un injecteur tiré au hasard dans la production de l'usine ait un diamètre intérieur qui appartient à cet intervalle avec la probabilité 0,90 (bornes arrondies à 10^{-3} près).

2) Un équipementier commande un lot d'injecteurs, dont l'entreprise annonce que la moyenne des diamètres intérieurs est 0,65. Afin de vérifier cette affirmation, il prélève un échantillon de 100 injecteurs dans ce lot et obtient les résultats suivants :

[0,59 ; 0,61[	[0,61 ; 0,63[	[0,63 ; 0,65[	[0,65 ; 0,67[	[0,67 ; 0,69[
6	8	51	30	5

a) En supposant que toutes les valeurs observées sont situées aux centres des classes, déterminer une valeur approchée de la moyenne et de l'écart type de cet échantillon (les résultats seront arrondis au millième). On ne demande pas le détail des calculs.

b) On admet que l'écart type de cet échantillon est une bonne approximation de celui du lot commandé.
Pour répondre à la question : "l'équipementier peut-il accepter au risque de 5% l'affirmation du fournisseur ?", construire un test bilatéral de validité d'hypothèse :

- choisir l'hypothèse nulle H_0 et l'hypothèse alternative H_1 ,
- déterminer l'intervalle d'acceptation au seuil de 5% (borne inférieure à 10^{-3} près par défaut, borne supérieure à 10^{-3} près par excès),
- énoncer la règle de décision de ce test.

Utiliser le test avec l'échantillon prélevé, et conclure.

ANNEXE