EXERCICE 1 - (10 points)

A) On considère l'équation différentielle : $y'' - y = 2e^x$, désignée par (E) dans laquelle y est une fonction de la variable réelle x.

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' - y = 0$.

2) Déterminer le nombre réel k tel que la fonction y_1 définie par $y_1(x) = kxe^x$ soit une solution particulière de l'équation (E).

3) Donner la solution générale de l'équation (E).

4) Déterminer la fonction f, solution de (E) qui vérifie

$$f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 0.$$

B) On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x) = xe^x + e^{-x}$, on note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 - a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

b) Calculer $f'(x)$. Vérifier que $f'(x) = g(x)e^x$, où g désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + 1 - e^{-2x}$.
Démontrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Calculer $g(0)$. En déduire le signe de $g(x)$, en fonction de x.

d) Dresser le tableau de variation de f.

2 - Tracer la courbe (C) (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).

3 - a) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x - 1)e^x$.
Calculer $h'(x)$. En déduire une primitive de f.

b) Calculer l'aire, en cm^2, du domaine délimité, sur la figure, par la courbe (C), les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = 1$ (on donnera la valeur exacte de cette aire puis sa valeur décimale arrondie au centième).

EXERCICE 2 - (10 points)

Une entreprise produit en grande série une pièce en plastique moulé.
On considère la variable aléatoire C qui, à chaque pièce, associe sa plus grande cote, mesurée en mm. On admet que C suit la loi normale de moyenne $m = 69$ et d'écart type $\sigma = 0{,}32$.

Partie A

On considère comme défectueuses les pièces dont la plus grande cote est extérieure à l'intervalle [68,4 ; 69,6].

1) Montrer que la probabilité qu'une pièce tirée au hasard dans la production soit défectueuse est égale à 0,06 (résultat arrondi au centième).

2) Soit N un nombre entier positif. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de N pièces, prélevées avec remise dans la production, associe le nombre de pièces défectueuses parmi les N.
Pour cette question, on arrondira les résultats au millième.

a - On se place dans le cas où $N = 4$.
Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Quels sont ses paramètres ?

Calculer la probabilité P_1 pour que, parmi 4 pièces prélevées au hasard et avec remise dans la production, il y ait 1 pièce défectueuse exactement.
Calculer la probabilité P_2 pour que parmi 4 pièces prélevées au hasard et avec remise dans la production, il y ait au moins 2 pièces défectueuses.

b - On se place dans le cas où $N = 50$. On admet que la loi suivie par X peut être approchée par une loi de Poisson.
Préciser le paramètre de cette loi de Poisson.

On prélève au hasard et avec remise 50 pièces dans la production ; en utilisant cette loi de Poisson, calculer une valeur décimale approchée de chacune des probabilités suivantes :

- P_3 pour que, parmi les 50 pièces, il n'y ait aucune pièce défectueuse ;
- P_4 pour que, parmi les 50 pièces, il y ait au plus 2 pièces défectueuses.

Partie B

On prélève dans la production des échantillons aléatoires de 100 pièces, avec remise.
On note $\overline{C}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon, associe la moyenne de la plus grande cote des 100 pièces.
Pour cette partie, on arrondira les résultats au millième.

1) Déterminer le nombre réel a positif tel que $P(69-a \leq \overline{C} \leq 69+a) = 0{,}95$.

2) Avec un échantillon de 100 pièces, on a obtenu, à partir des résultats répartis en classes, le tableau suivant :

Centres des classes	68,40	68,50	68,60	68,70	68,80	68,90
Effectif	8	9	10	9	12	11

Centres des classes	69	69,10	69,20	69,30	69,40	69,50	69,60
Effectif	9	9	7	6	7	2	1

(On suppose que, pour chaque classe, les valeurs mesurées sont toutes égales à celle du centre de la classe).

a - Calculer la moyenne de cet échantillon.

b - A partir de cet échantillon, peut-on admettre, au risque de 5%, que la moyenne des plus grandes cotes des pièces de l'ensemble de la fabrication est 69 mm ?