EXERCICE 1 : (11 points)

Soit l'équation différentielle : $10^9 y' + 3t^2 y = 0 \quad (E)$, où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) Résoudre (E) dans $\mathbb{R}$.

2) On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^3}{10^9}}$.

a) Vérifier que f est la solution de (E) prenant la valeur 1 en 0.

b) Démontrer que f est une fonction décroissante.
Déterminer sa limite en $+\infty$ et interpréter géométriquement ce résultat.

c) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

d) Tracer soigneusement la courbe représentative de f dans un repère orthogonal pour t variant de 0 à 1500 (<u>échelle</u> : 1 cm pour 100 unités sur l'axe des abscisses et 10 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées).

3) a) Résoudre algébriquement dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(t) = 0{,}5$; donner la valeur exacte de la solution, puis sa valeur approchée arrondie à l'unité.

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(t) < 0{,}5$.

4) On appelle T la variable aléatoire mesurant la durée, en heures, de fonctionnement sans panne d'une machine.
On admet que, pour t réel positif ou nul, $f(t)$ représente la probabilité que T soit supérieur à t ; ainsi $P(T > t) = f(t)$.

a) Calculer la probabilité que la machine fonctionne plus de 1000 heures sans panne.

b) Pourquoi peut-on affirmer qu'il y a plus de neuf chances sur dix que la machine fonctionne sans panne plus de 400 heures ?

EXERCICE 2 : (9 points)

A) Un lycée achète son papier pour photocopieur à une entreprise. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque feuille associe son épaisseur en microns. Le fabricant spécifie que X suit une loi normale de moyenne 110 et d'écart type 3.
Un photocopieur se bloque dès que le papier fourni a une épaisseur inférieure à 101 microns ou supérieure à 122 microns.
Déterminer, avec la précision permise par la table, la probabilité p qu'une feuille du papier livré bloque le photocopieur.
Dans la suite on prendra $p = 0{,}001$.

B) Une documentation de 12 pages est photocopiée en 50 exemplaires. On appelle K la variable aléatoire qui, à toute série de 600 photocopies, associe le nombre de blocages pendant la reprographie. On assimilera une série de 600 photocopies à un prélèvement de 600 feuilles de papier au hasard et avec remise.

1) Quelle est la loi de probabilité suivie par K ?

2) Calculer la probabilité des événements suivants (on donnera les résultats exacts, puis arrondis au millième) :

a) Au cours de ce travail, le photocopieur ne se bloque jamais.

b) Au cours de ce travail, le photocopieur se bloque exactement trois fois.

3) On admet que la loi de probabilité suivie par K peut être approchée par une loi de Poisson.

a) Préciser son paramètre.

b) Quelle est la probabilité que le photocopieur se bloque plus de deux fois pendant ce travail ?

C) Le lycée met à l'épreuve les affirmations du fabricant concernant la moyenne de la variable aléatoire X. On suppose que l'écart type est connu et égal à 3. Pour cela, il étudie un échantillon de 1000 feuilles prises au hasard dans une livraison. L'étude de l'épaisseur de ces feuilles donne, en microns, une moyenne de 109,9.

1) On effectue un test statistique ; préciser quelle est l'hypothèse nulle H_0 et l'alternative H_1.

2) On désigne par $\overline{X}$ la variable aléatoire qui à tout échantillon de 1000 feuilles tirées au hasard et avec remise associe la moyenne des épaisseurs des feuilles de cet échantillon.
Quelle est la loi de probabilité de $\overline{X}$ sous l'hypothèse H_0 ?

3) Au vu de l'échantillon étudié, peut-on admettre avec un coefficient de confiance de 90 %, que la moyenne est 110 ?