EXERCICE 1 **(10 points)**

Partie A : On considère l'équation différentielle

$$xy' + 2y = \frac{1}{x^2} \text{ , désignée par } (E),$$

dans laquelle y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

1) Résoudre l'équation différentielle

$$xy'+2y=0.$$

2) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

   Vérifier que g est une solution particulière de l'équation (E).

3) Donner la solution générale de (E).

4) Déterminer la fonction f, solution de (E), qui vérifie f(1)=1.

Partie B : On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1+\ln x}{x^2}$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1) a- Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$. En déduire que (C) admet deux asymptotes, dont on donnera les équations.

   b- Montrer que $f'(x)$ est du signe de -(1+2 lnx). En déduire que f est croissante sur l'intervalle $\left]0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$.

   c- Dresser le tableau de variation de f.

2) Montrer que (C) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{1}{e}$.
   Tracer (C) (unité graphique : 4 cm).

3) Soit k la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $k(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$.

Calculer k'(x). En déduire une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

Soit A l'aire, exprimée en cm², du domaine plan délimité, sur la figure, par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=\dfrac{1}{e}$ et $x=1$.

Calculer la valeur exacte de A, puis sa valeur décimale arrondie au centième.

EXERCICE 2 **(10 points)**

Une usine fabrique un grand nombre de tiges métalliques de même modèle.
On considère la variable aléatoire X, qui associe à chaque tige prise au hasard sa longueur, exprimée en millimètres. On admet que X suit la loi normale de moyenne m=240, d'écart type σ=0,61.

Partie A :

Une tige est déclarée défectueuse si sa longueur est hors de l'intervalle [239 , 241].

1) Montrer que la probabilité qu'une tige prise au hasard dans la production soit défectueuse est égale à 0,1 (résultat arrondi au dixième).

2) Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 20 tiges, prélevées dans la production, au hasard et avec remise, associe le nombre de tiges défectueuses parmi les 20.

a- Indiquer, en justifiant, quelle est la loi suivie par Y.
b- Calculer la probabilité que, parmi 20 tiges prélevées au hasard et avec remise dans la production, il y a au moins 2 pièces défectueuses.

Partie B : On prélève dans la production des échantillons aléatoires de 50 pièces, avec remise.

On considère la variable aléatoire $\overline{X}$ qui à chaque échantillon, associe, la moyenne des longueurs des 50 tiges.

1) Quelle est la loi suivie par $\overline{X}$?

2) a- Déterminer le nombre réel a positif tel que $p\left(240-a\le \overline{X}\le 240+a\right)=0,95$.
(on arrondira le résultat au centième)

b- On prélève dans les conditions précédentes un échantillon de 50 tiges, dont on calcule la moyenne des longueurs.
A quelle condition accepte-t-on, au seuil de signification 5%, l'hypothèse selon laquelle la moyenne de la production totale est 240 mm ?