EXERCICE I **(12 points)**

Partie A :

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + 2y' + y = x^2 + 5x + 4.$$

1- a) Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

b) Trouver une solution particulière de l'équation (E) qui soit une fonction polynôme.

c) Donner la solution générale de (E).

2- Déterminer la fonction f, solution particulière de (E) qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur l'ensemble R des nombres réels par :

$$f(x) = e^{-x} + x^2 + x.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2- a) Calculer $f'(x)$.

b) Montrer que, pour $x > 0$ on a $1 - e^{-x} > 0$,
et que, pour $x < 0$ on a $1 - e^{-x} < 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$.

c) Donner le tableau de variation de la fonction f.

3- On considère la fonction g définie sur l'ensemble R des nombres réels par

$$g(x) = x^2 + x$$

On note (C') la courbe représentative de g dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a) De l'étude du signe de $f(x) - g(x)$, déduire la position relative des courbes (C) et (C').

b) Tracer les courbes (C) et (C') sur une même figure (unité graphique 2 cm).

4- Calculer l'aire, en cm^2, du domaine délimité, sur la figure, par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.(On donnera la valeur exacte de cette aire, puis sa valeur décimale arrondie au centième.)

EXERCICE II **(8 points)**

Une pièce mécanique est fabriquée en grande série dans une usine, par des postes de travail. Chacun d'eux est équipé de deux machines m_1 et m_2, réalisant des opérations différentes de façons indépendantes.

Partie A :

1- Une étude statistique a permis d'établir qu'en une journée, les probabilités de défaillance pour les machines sont :

Pour la machine m_1, égale à 0,01 et, pour la machine m_2, égale à 0,02.

Déterminer, pour une journée de fonctionnement d'un poste de travail, la probabilité de chacun des événements suivants :

(A) : "Les deux machines sont en panne",
(B) : "Aucune des deux machines n'est en panne",
(C) : "Une machine au moins est en panne",
(D) : "Une seule machine est en panne".

2- L'atelier comprend 25 postes de travail indépendants. Un poste est déclaré hors service si une machine au moins est en panne. On admet que la probabilité qu'au cours d'une journée un poste soit hors service est égale à 0,03.
Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de postes hors service au cours d'une journée.

a) Quelle est la loi de probabilité de X ?

b) Calculer $P[X \geq 2]$.

Partie B :

Une étude statistique a permis d'établir que, la probabilité pour qu'une pièce tirée au hasard dans la production soit défectueuse est égale à 0,05.
On prélève un échantillon de 100 pièces. On admet que la loi de probabilité (binomiale) de la variable aléatoire Y qui associe à chaque échantillon de 100 pièces le nombre de pièces défectueuses peut-être remplacée par une loi de Poisson.

1- Quel est le paramètre de cette loi de Poisson ?

2- En utilisant cette loi, calculer une valeur approchée de la probabilité que, parmi ces 100 pièces, 3 exactement soient défectueuses.