Exercice 1 (8 points)

Un atelier produit en une semaine un très grand nombre de pièces mécaniques, parmi lesquelles 2% sont "défectueuses" et 20% sont "excellentes".

I- On prélève successivement, au hasard, et avec remise, 50 pièces dans la production d'une semaine. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de pièces défectueuses dans cet échantillon.

1- Quelle est la loi de probabilité de X ?

2- Calculer $P(X \geq 2)$.

3- On décide d'approcher la loi de X par une loi de Poisson. Quel est le paramètre de cette loi ?

En utilisant cette loi, calculer la probabilité que le pourcentage de pièces défectueuses dans cet échantillon soit supérieur ou égal à 4%.

II- Maintenant, on prélève successivement, au hasard, et avec remise, 200 pièces dans la production d'une semaine. On note Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de pièces excellentes dans ce lot.

1- Quelle est la loi de probabilité de Y ?

2- On décide d'approcher la loi de Y par la loi normale de paramètres $m = 40$ et $\sigma = 5,66$.

a) Justifier le choix de ces paramètres.

b) Calculer la probabilité que le pourcentage de pièces excellentes dans le lot soit supérieur ou égal à 25%.

Exercice 2 (12 points)

- I- L'objet de cette partie est la recherche d'une solution sur $]0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle (1).

$$xy' + (x-1)y = x^2 \quad (1).$$

- 1- Donner une primitive de la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x} - 1$.

- 2- Résoudre l'équation différentielle (2).

$$xy' + (x-1)y = 0 \quad (2)$$

- 3- Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = x$ est une solution de l'équation différentielle (1).

- 4- Résoudre l'équation différentielle (1).

- 5- Déterminer la solution f de l'équation (1) telle que : $f(1) = 1 - \frac{1}{e}$.

- II- On considère la fonction numérique f définie sur l'ensemble des nombres réels par

$$f(x) = x - xe^{-x} = x(1 - e^{-x}).$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

A] Etude préalable

On pose $g(x) = 1 + (x-1)e^{-x}$ et on se propose d'étudier le signe de $g(x)$ en fonction de la valeur de x .

- 1- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ (on rappelle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$).

Calculer $g(0)$.

- 2- Montrer que $g'(x) = e^{-x}(2-x)$.

- 3- Dresser le tableau de variation de g (on ne demande pas d'étudier la limite de g en $-\infty$).

En déduire que pour tout réel x , $g(x)$ est du signe de x .

B] Etude de f

- 1- Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

- 2- Montrer que $f'(x) = g(x)$.

En déduire, à l'aide de l'étude préalable (A]3-), le tableau de variation de f .

- 3- Montrer que la droite (Δ) , d'équation $y = x$, est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ quand x tend vers $+\infty$.

Préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

- 4- Sur une feuille de papier millimétré, représenter la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (Δ) (unité graphique : 1 cm sur chaque axe).