PREMIER EXERCICE (10 points)

Jne machine produit des rondelles métalliques en grande série.
Une rondelle est acceptée si son diamètre extérieur est compris entre 21,9 mm et 22,1 mm. On suppose que sur l'ensemble de la production le diamètre extérieur des rondelles est une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $m = 22$ mm et d'écart-type $\sigma = 0{,}05$ mm.

1°. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit refusée ?

2°. Dans cette question, on admet que la probabilité qu'une rondelle produite par cette machine soit défectueuse est 0,045. On prélève un échantillon de 80 pièces. On désigne par R la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon.
On se propose de calculer la probabilité d'avoir au plus deux rondelles défectueuses.

a) On utilise la loi binômiale : préciser les paramètres de cette loi et calculer la probabilité cherchée.

b) On décide d'approcher cette loi binômiale par une loi de Poisson : préciser le paramètre de cette loi et calculer la probabilité cherchée.

3°. On considère les échantillons de taille 100 que l'on peut extraire de la production. Le diamètre moyen calculé dans un échantillon quelconque est une variable aléatoire $\overline{X}$ qui suit une loi normale $N(m_e;\sigma_e)$.

a) Préciser la valeur de la moyenne m_e et de l'écart-type σ_e de cette loi.

b) Calculer la probabilité que dans un échantillon on trouve un diamètre moyen supérieur à 22,01 mm.

DEUXIEME EXERCICE (10 points)

1° Question préliminaire :
Soit la fonction F définie sur R par $F(x) = (x-1)e^x$. Calculer la dérivée de cette fonction. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^1 xe^x dx$.

2° a) Résoudre l'équation différentielle : $y' + y = 0$.

b) Montrer que F est une solution particulière de l'équation différentielle (E) : $y' + y = (2x-1)e^x$.

c) Déduire des résultats précédents les solutions de l'équation (E).

3° Soit h la fonction définie sur R par $h(x) = xe^x - e^x - e^{-x} = (x-1)e^x - e^{-x}$.

a) Vérifier que h est une solution de (E).

b) Etudier les variations de h sur [0;1]. Etablir le tableau de variations. En déduire que h est négative sur [0;1].

c) Calculer $\int_0^1 h(x)dx$.

d) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(0;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique : 1 cm), on considère l'ensemble (D) des points M(x, y) tels que $0 \le x \le 1$ et $h(x) \le y \le 0$ représenté ci-contre.
Calculer la valeur approchée au mm^2 près par défaut de l'aire de (D).