

∞ Brevet de technicien supérieur ∞  
 juin 2012 - groupement B1 Métropole.

**Exercice 1****12 points**

*Les trois parties de cet exercices peuvent être traitées de façon indépendante.*

*A. résolution d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle (E) :  $y' + 2y = -5e^{-2x}$  où  $y$  est une fonction inconnue de la variable réelle  $x$ , définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et  $y'$  la fonction dérivée de  $y$ .

1. Déterminer les solutions définies sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle (E<sub>0</sub>) :  $y' + 2y = 0$ .
2. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = -5xe^{-2x}$ . Démontrer que la fonction  $g$  est une solution de (E).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution  $f$  de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale  $f(0) = 1$ .

*B. étude locale d'une fonction*

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = (1 - 5x)e^{-2x}.$$

On note  $C$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1 a) On admet le résultat suivant :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5xe^{-2x} = 0$ . Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

b) Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.

La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

La courbe  $C$  admet une asymptote en  $+\infty$  dont une équation est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
$y = 1 - 5x$	$y=0$	$x=0$

2 a) À l'aide du développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction  $t \rightarrow e^t$ , déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction  $t \rightarrow e^{-2t}$ .

b) En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction  $f$  est :  $f(x) = 1 - 7x + 12x^2 + x^2\varepsilon(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ .

c) En déduire une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $C$  au point d'abscisse 0.

d) Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fautive ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

On veut justifier qu'au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe  $C$  est au-dessus de la droite  $T$ . Recopier sur la copie la justification qui vous paraît exacte

$12x^2$ est positif au voisinage de 0.	$x^2\varepsilon(x)$ est positif au voisinage de 0.	$1 - 7x$ est positif au voisinage de 0.
---	---	--

C. Calcul intégral

1. On note  $I = \int_1^2 f(x)dx$  où  $f$  est la fonction définie dans la partie B.

a. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties que  $I = \frac{23e^{-4} - 13e^{-2}}{4}$ .

b. Donner la valeur de  $I$ , arrondie à  $10^{-2}$ .

2. a. Donner, sans justification, le signe de  $f(x)$  pour  $x$  dans l'intervalle  $[1; 2]$ .

b. Interpréter graphiquement le nombre  $I$ .

*Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou non aboutie, sera prise en compte.*

**EXERCICE 2**

**8 points**

*Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.*

Un particulier souhaite acheter, auprès d'un producteur, des bottes de paille pour l'isolation de sa maison.

A. Loi normale

On prélève au hasard une botte de paille dans la production du 20 juillet 2011.

1. On note  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque botte ainsi prélevée, associe son épaisseur exprimée en millimètres. On admet que  $X$  suit la loi normale de moyenne 360 et d'écart type 18. Calculer la probabilité  $p(350 \leq X \leq 370)$ .

2. On note  $Y$  la variable aléatoire qui, à chaque botte prélevée dans la production de cette journée, associe sa densité exprimée en  $\text{kg/m}^3$ . On admet que  $Y$  suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart type 5.

Calculer la probabilité qu'une botte prélevée dans la production de cette journée ait une densité comprise entre  $90 \text{ kg/m}^3$  et  $110 \text{ kg/m}^3$ .

3. On suppose que les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

Une botte de paille est conforme aux normes d'isolation si son épaisseur, exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle  $[350; 370]$  et si sa densité, exprimée en  $\text{kg/m}^3$ , appartient à l'intervalle  $[90; 110]$ . Calculer la probabilité qu'une botte prélevée dans la production de cette journée soit conforme aux normes d'isolation.

*Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou non aboutie, sera prise en compte.*

### B. Loi binomiale

**Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à  $10^{-3}$ .**

On considère un stock important de bottes de paille, dont une partie est destinée à un usage d'isolation. On note  $E$  l'événement. Une botte prélevée au hasard dans le stock est conforme aux normes d'isolation. On suppose que  $p(E) = 0,4$ .

On prélève au hasard 5 bottes de paille dans le stock pour vérification de la conformité aux normes d'isolation. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 5 bottes.

On considère la variable aléatoire  $Z$  qui, à tout prélèvement de 5 bottes ainsi défini, associe le nombre bottes de paille conformes aux normes d'isolation.

1. Justifier que la variable aléatoire  $Z$  suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, toutes les bottes de paille soient conformes aux normes d'isolation.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins quatre les bottes de paille soient conformes aux normes d'isolation.

### C. Intervalle de confiance

Dans cette partie, on considère les bottes de paille produites le 22 juillet 2011. On prélève au hasard un échantillon de 50 bottes de paille dans cette production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On constate que 37 bottes de paille de cet échantillon sont conformes aux normes d'isolation.

1. Donner une estimation ponctuelle de la fréquence inconnue  $p$  des bottes de paille de cette production qui sont conformes aux normes d'isolation.
2. Soit  $F$  la variable aléatoire qui à tout échantillon de 50 bottes ainsi prélevé dans cette production, associe la fréquence des des bottes de cet échantillon qui sont conformes aux normes d'isolation.

On suppose que  $F$  suit la loi normale de moyenne inconnue  $p$  et d'écart type  $\sqrt{\frac{p(1-p)}{50}}$ .

- a. Déterminer un intervalle de confiance de la fréquence  $p$  au niveau de confiance de 95 %.
- b. On considère l'affirmation suivante : « La fréquence  $p$  est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question 2. a ». Cette affirmation est-elle vraie? (Donner la réponse sans explication)

**œ Brevet de technicien supérieur œ**  
**Métropole–Antilles–Guyane**  
**session 2012 - groupement B2**

**Exercice 1**

**12 points**

A. Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 2y = -5e^{-2x},$$

où  $y$  est une fonction inconnue de la variable  $x$ , définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et  $y'$  la fonction dérivée de  $y$ .

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle :

$$(E_0) : y' + 2y = 0.$$

2. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = -5xe^{-2x}$ . Démontrer que la fonction  $g$  est une solution de  $(E)$ .
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle  $(E)$ .
4. Déterminer la solution  $f$  de l'équation différentielle  $(E)$  vérifiant la condition initiale  $f(0) = 1$ .

B. Étude locale d'une fonction

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (1 - 5x)e^{-2x}$ . On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

a. On admet le résultat suivant :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5xe^{-2x} = 0$ . Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

b. Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.

La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

La courbe  $\mathcal{C}$  admet une asymptote en  $+\infty$  dont une équation est :

$y = 1 - 5x$	$y = 0$	$x = 0$
--------------	---------	---------

2. a. À l'aide du développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction  $t \mapsto e^t$ , déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction :  $x \mapsto e^{-2x}$ .

b. En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction  $f$  est :

$$f(x) = 1 - 7x + 12x^2 + x^2 \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

c. En déduire une équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0.

d. Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.

La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

On veut justifier qu'au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe  $\mathcal{C}$  est au dessus de la droite  $\mathcal{T}$ . Recopier sur la copie la justification qui vous paraît exacte.

$12x^2$ est positif au voisinage de 0.	$x^2 \varepsilon(x)$ est positif au voisinage de 0.	$1 - 7x$ est positif au voisinage de 0.
--	---	---

### C. Calcul intégral

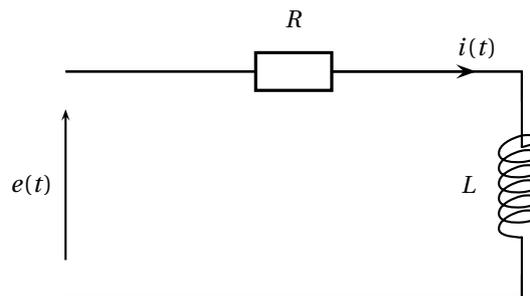
1. on note  $I = \int_1^2 f(x) dx$  où  $f$  est la fonction définie dans la partie B.
  - a. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que  $I = \frac{23e^{-4} - 13e^{-2}}{4}$ .
  - b. Donner la valeur approchée de  $I$ , arrondie à  $e^{-2}$ .
2. a. Donner sans justification, le signe de  $f(x)$ , pour  $x$  dans l'intervalle  $[1 ; 2]$ .
  - b. Interpréter graphiquement le nombre  $I$ .  
*Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou non aboutie, sera prise en compte.*

### Exercice 2

8 points

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

On considère le circuit représenté ci-dessous alimenté à tout instant  $t$  par une tension  $e(t)$ . On note  $i(t)$  l'intensité du courant.



L'équation différentielle régissant ce circuit s'écrit :

$$Li'(t) + Ri(t) = e(t)$$

où la fonction inconnue  $i$ , de la variable  $t$ , est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $i'$  est la fonction dérivée de  $i$ .

On se place dans le cas où  $R = 5 \Omega$  et  $L = 1 \text{ H}$  de sorte que l'équation différentielle précédente devient :

$$(1) : i'(t) + 5i(t) = e(t),$$

avec  $i(0^+) = 0$ .

On suppose que la tension  $e$  est donnée par :

$$e(t) = \begin{cases} 10 & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{si } t < 0 \text{ ou } t \geq 2. \end{cases}$$

#### A. Étude de la tension d'entrée

1. Sur une feuille de papier millimétré, tracer, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de  $e$  sur l'intervalle  $[0 ; 5]$ . On prendra comme unité 2 cm pour l'axe des abscisses et 0,5cm pour l'axe des ordonnées.

2. On désigne par  $\mathcal{U}$  la fonction échelon unité définie par  $\mathcal{U}(t) = 0$  si  $t < 0$  et  $\mathcal{U}(t) = 1$  si  $t \geq 0$ .

Montrer que pour tout nombre réel  $t$ , on a  $e(t) = 10[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - 2)]$ .

### B. Transformation de Laplace

En utilisant la transformée de Laplace, on se propose de déterminer l'intensité  $i$  du courant. On admet que  $i$ ,  $i'$  et  $e$  admettent des transformées de Laplace.

On note  $E(p) = \mathcal{L}(e(t))$  et  $I(p) = \mathcal{L}(i(t))$ .

1. Déterminer  $E(p)$ .
2. a. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle (1), montrer, sachant que  $i(0^+) = 0$ , que  $I(p) = 10 \frac{1 - e^{-2p}}{p(p+5)}$ .
- b. Montrer que  $I(p)$  peut s'écrire sous la forme :

$$I(p) = 2 \left[ \frac{1}{p} - \frac{1}{p+5} - \frac{e^{-2p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p+5} \right].$$

3. a. Déterminer les originaux  $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)$ ;  $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+5}\right)$ ;  $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2p}}{p}\right)$  et  $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2p}}{p+5}\right)$ .
- b. En déduire l'intensité  $i(t) = \mathcal{L}^{-1}(I(p))$ .

### C. Étude de la tension de sortie

On note  $u$  la tension de sortie aux bornes de la résistance. On admet que, pour tout réel  $t$ ,  $u(t) = Ri(t)$ . On a ainsi :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 10(1 - e^{-5t}) & \text{si } 0 \leq t < 2. \\ 10e^{-5t}(e^{10} - 1) & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

On fournit le tableau de valeurs suivant, où  $u(t)$  est arrondi au centième.

$t$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	2,1	2,25	2,5	3	5
$u(t)$	0	7,13	9,18	9,76	9,93	9,99	10	6,06	2,86	0,82	0,07	0

1. Sur le graphique de la partie A, représenter  $u$  sur l'intervalle  $[0; 5]$ .
2. Déterminer à l'aide du graphique, la plus petite valeur  $t_0$  de  $t$  telle que  $t \geq 2$  et  $u(t) \leq 5$ .  
Laisser apparents sur la figure les tracés utilisés.