

BTS Productique bois
Session 1997

Exercice 1 (12 points)

Partie A On considère les 2 équations différentielles :

$$(E1) : y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0,$$

et $(E2) : y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 2x - 5.$

où y est une fonction deux fois dérivable de la variable x .

1. Résoudre l'équation différentielle (E1).

2.1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction $x \mapsto ax + b$, notée g , soit une solution de (E2).

2.2. En déduire la solution générale de (E2).

3. Déterminer f , solution de (E2), qui vérifie les conditions : $f(0) = -\frac{13}{4}$ et $f'(0) = 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x) = x - 4 + \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-x}$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1.1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

1.2. En remarquant que $f(x) = e^{-x}(xe^x - 4e^x + \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{2})$, déterminer la limite de f en $-\infty$.

2.1. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.

2.2. Montrer que pour tout x réel, $f''(x) > 0$. En déduire le sens de variation de f' .

2.3. En remarquant que $f'(0) = 0$, donner le signe de $f'(x)$.

2.4. Dresser le tableau de variation de la fonction f .

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 4)]$ et montrer que pour tout x réel, $f(x) - (x - 4)$ conserve un signe constant que l'on précisera.

Interpréter graphiquement les résultats de cette question.

4. Tracer la droite D , d'équation $y = x - 4$, et la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 2 (8 points)

Un atelier fabrique des pieds de table en deux opérations indépendantes.

1. La première opération est un tournage.

Deux machines M_1 et M_2 sont utilisées pour effectuer ce travail. La production journalière de la machine M_1 est 3000 pièces, celle de la machine M_2 est 5000 pièces.

Une étude statistique a montré que le pourcentage de pièces défectueuses produites par la machine M_1 est 0,2 % et que le pourcentage de pièces défectueuses produites par la machine M_2 est 0,3 %.

Dans la production totale d'un jour, on prélève au hasard une des pièces tournées.

1.1. Montrer que la probabilité que cette pièce soit défectueuse est 0,2625 %

1.2. Calculer la probabilité que la pièce ait été tournée par la machine M_1 sachant qu'elle est défectueuse.

2. La deuxième opération est un fraisage.

Une étude statistique a montré que 2 % des pièces fraisées sont défectueuses. On prélève au hasard un lot de 100 pièces ; compte tenu du nombre important des pièces, la confection d'un lot est assimilée à une suite de tirages avec remise. On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 100 pièces, associe le nombre de pièces défectueuses à la suite du fraisage.

2.1. Quelle est la loi de probabilité de X ? Calculer l'espérance mathématique de X .

2.2. On approche la loi de X par une loi de Poisson.

Quel est le paramètre de cette loi de Poisson ? Utiliser cette loi pour calculer une valeur approchée de la probabilité que, parmi les 100 pièces prélevées, il y en ait plus de 5 dont le fraisage soit défectueux.

3. On tire au hasard un pied dans un lot constitué des pieds de table ayant subi les deux usinages précédents (tournage et fraisage). Calculer la probabilité que ce pied ne comporte aucun défaut (de tournage ou de fraisage).
4. On veut contrôler la longueur des pieds fabriqués. À chaque pied on associe sa longueur l mesurée en centimètres. On définit ainsi une variable aléatoire L . On admet que L suit la loi normale de moyenne 70 et d'écart-type 0,05. Un pied de table est considéré comme acceptable si sa longueur est comprise entre 69,9 et 70,1.

Calculer la probabilité qu'un pied de table soit rejeté.