Brevet de technicien supérieur
Métropole–Antilles–Guyane
session 2014 - groupement B1

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y" + 2y' + y = 2\mathrm{e}^{-x},$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $r^2 + 2r + 1 = 0$.

   b. En déduire les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E_0): \quad y'' + 2y' + y = 0.$$

2. *Cette question est un questionnaire à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraÎt exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

   Une solution de l'équation différentielle (E) est donnée par la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression ci-dessous.

$g(x) = 2\mathrm{e}^{-x}$	$h(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$	$k(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$

   Les dérivées première et seconde de ces fonctions sont données ci-dessous (ces calculs sont exacts).

$$g'(x) = -2\mathrm{e}^{-x} \qquad h'(x) = \left(2x - x^2\right)\mathrm{e}^{-x} \qquad k'(x) = (2-2x)\mathrm{e}^{-x}$$
$$g''(x) = 2\mathrm{e}^{-x} \qquad h''(x) = \left(x^2 - 4x + 2\right)\mathrm{e}^{-x} \qquad k''(x) = (-4+2x)\mathrm{e}^{-x}$$

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution (de J'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = -1$ et $f'(0) = 1$.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Un logiciel de calcul formel fournit ci-dessous une expression de la dérivée de f. Ce logiciel note $\%\mathrm{e}^{-x}$ la quantité e^{-x}.

(%i1)	$f(x) := \left(x^2 - 1\right) * \%\mathrm{e}^{-x}$;
(%o1)	$f(x) := \left(x^2 - 1\right)\%\mathrm{e}^{-x}$
(%i2)	factor(diff($f(x)$, x);
(%o2)	$-\left(x^2 - 2x - 1\right)\%\mathrm{e}^{-x}$

Justifier par un calcul l'expression de $f'(x)$ affichée à la ligne notée (%o2).

b. On rappelle qu'une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a est donnée par : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

2. a. À l'aide du développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^t$, déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction : $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.

b. En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0.$$

c. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*

La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

On veut justifier qu'au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite T. Recopier sur la copie la justification qui vous paraît exacte.

$-1 + x$ est positif au voisinage de 0.	$\frac{x^2}{2}$ est positif au voisinage de 0.	$x^2\epsilon(x)$ est positif au voisinage de 0.

C. Calcul intégral

1. On note $I = \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ où f est la fonction définie dans la partie B.

a. Un logiciel de calcul formel fournit, à la ligne notée (%o3), une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f. Ce logiciel note $\%\mathrm{e}^{-x}$ l'expression e^{-x}.

(%i3)	factor(integrate $(f(x), x)$) ;
(%o3)	$-(x+1)^2\%\mathrm{e}^{-x}$

Justifier ce résultat.

b. Montrer que la valeur exacte de I est : $I = 4\mathrm{e}^{-1} - 16\mathrm{e}^{-3}$.

2. *Cette question est un questionnaire à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraÎt exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

On admet que $f(x)$ est positif pour x dans l'intervalle $[1\,;\,3]$.

I est une mesure, en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.	I est une mesure, en cm^2 de l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.	I est une mesure, en unités d'aire de l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $y = 1$ et $y = 3$.

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}

Un fournisseur d'accès à Internet étudie les défaillances de son système de transmission par ADSL.

A. Évènements indépendants

On considère que les défauts d'éligibilité à l'ADSL sont dus à deux causes principales :

— le diamètre des fils de cuivre utilisés entre le central et le domicile de l'abonné est trop faible (inférieur à 0,4 mm) ;

— la distance entre le domicile de l'abonné et le central téléphonique est trop importante.

On considère un abonné pris au hasard dans un département donné. On note A l'évènement « le diamètre des fils de cuivres entre le central et le domicile de cet abonné est trop faible », et B l'évènement « la distance entre le domicile de cet abonné et le central téléphonique est trop importante ».
Une étude statistique permet d'admettre que les probabilités des évènements A et B sont : $p(A) = 0,02$ et $p(B) = 0,085$.
On suppose que les évènements A et B sont indépendants.
Calculer la probabilité des deux évènements suivants :

1. E_1 : « la ligne téléphonique de l'abonné possède les deux défauts d'éligibilité à l'ADSL ».

2. E_2 : « la ligne téléphonique de l'abonné possède au moins un des deux défauts d'éligibilité à l'ADSL ».

B. Loi binomiale et loi de Poisson

Les données utilisateur sont transmises par trames de 53 octets. Dans une connexion, on prélève une trame au hasard. La connexion est suffisamment importante pour assimiler ce prélèvement à un tirage au hasard et avec remise de 53 octets parmi l'ensemble des octets transmis lors de la connexion.
On suppose que la probabilité qu'un octet prélevé au hasard dans la connexion contienne une erreur est $0,03$.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 53 octets ainsi défini, associe le nombre d'octets contenant une erreur.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucun octet ne contienne une erreur.

3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus trois octets contiennent une erreur.

4. On considère que la loi suivie par X peut être approchée par une loi de Poisson.

Justifier que le paramètre de cette loi de Poisson est $\lambda = 1,59$.

5. On désigne par Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre le $\lambda = 1,59$.

Calculer, à l'aide de la calculatrice :

a. $P(Y = 0)$;

b. $P(Y \leqslant 3)$.

C. Intervalle de confiance

Dans cette partie, on considère un stock de rouleaux de câbles de cuivre destiné à la livraison à une entreprise d'installation de lignes téléphoniques. On souhaite estimer la fréquence inconnue p des rouleaux de ce stock ayant une section inférieure à $0,4$ mm.
On prélève un échantillon aléatoire de 100 rouleaux dans ce stock. Ce stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 rouleaux.
On constate que seuls 4 rouleaux de cet échantillon ont une section inférieure à $0,4$ mm.

1. Donner une estimation ponctuelle de la fréquence inconnue p des rouleaux de ce stock ayant une section inférieure à $0,4$ mm.
2. Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 rouleaux ainsi prélevé dans ce stock, associe la fréquence des rouleaux de cet échantillon ayant une section inférieure à $0,4$ mm.

   On suppose que F suit la loi normale de moyenne inconnue p et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}}$.

   a. Déterminer un intervalle de confiance de la fréquence p avec le coefficient de confiance 95 %.

   b. On considère l'affirmation suivante : « la fréquence p est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question 2. a. ».

   Cette affirmation est-elle vraie ?

Brevet de technicien supérieur
Métropole–Antilles–Guyane
session 2014 - groupement B2

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y" + 2y' + y = 2\mathrm{e}^{-x},$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $r^2 + 2r + 1 = 0$.

   b. En déduire les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

   $$(E_0): \quad y'' + 2y' + y = 0.$$

2. *Cette question est un questionnaire à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraÎt exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

   Une solution de l'équation différentielle (E) est donnée par la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression ci-dessous.

$g(x) = 2\mathrm{e}^{-x}$	$h(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$	$k(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$

   Les dérivées première et seconde de ces fonctions sont données ci-dessous (ces calculs sont exacts).

   $$g'(x) = -2\mathrm{e}^{-x} \qquad h'(x) = \left(2x - x^2\right)\mathrm{e}^{-x} \qquad k'(x) = (2-2x)\mathrm{e}^{-x}$$
   $$g''(x) = 2\mathrm{e}^{-x} \qquad h''(x) = \left(x^2 - 4x + 2\right)\mathrm{e}^{-x} \qquad k''(x) = (-4+2x)\mathrm{e}^{-x}$$

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = -1$ et $f'(0) = 1$.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Un logiciel de calcul formel fournit ci-dessous une expression de la dérivée de f. Ce logiciel note $\%\mathrm{e}^{-x}$ la quantité e^{-x}.

(%i1)	$f(x) := \left(x^2 - 1\right) * \%\mathrm{e}^{-x}$;
(%o1)	$f(x) := \left(x^2 - 1\right)\%\mathrm{e}^{-x}$
(%i2)	factor(diff($f(x)$, x) ;
(%o2)	$-\left(x^2 - 2x - 1\right)\%\mathrm{e}^{-x}$

Justifier par un calcul l'expression de $f'(x)$ affichée à la ligne notée (%o2).

b. On rappelle qu'une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a est donnée par : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

2. **a.** À l'aide du développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^t$, déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction : $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.

b. En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

c. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraÎt exacte. On ne demande aucune justification.*

La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

On veut justifier qu'au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite T. Recopier sur la copie la justification qui vous paraît exacte.

$-1+x$ est positif au voisinage de 0.	$\frac{x^2}{2}$ est positif au voisinage de 0.	$x^2\epsilon(x)$ est positif au voisinage de 0.

C. Calcul intégral

1. On note $I = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ où f est la fonction définie dans la partie B.

a. Un logiciel de calcul formel fournit, à la ligne notée (%o3), une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f. Ce logiciel note $\%\mathrm{e}^{-x}$ l'expression e^{-x}.

(%i3)	factor(integrate $(f(x), x)$) ;
(%o3)	$-(x+1)^2\%\mathrm{e}^{-x}$

Justifier ce résultat.

b. Montrer que la valeur exacte de I est : $I = 4\mathrm{e}^{-1} - 16\mathrm{e}^{-3}$.

2. *Cette question est un questionnaire à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraÎt exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

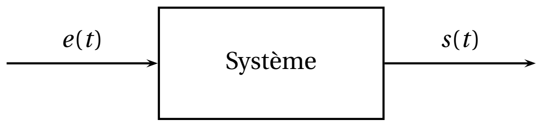
On admet que $f(x)$ est positif pour x dans l'intervalle $[1\,;\,3]$.

I est une mesure, en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x=1$ et $x=3$.	I est une mesure, en cm^2 de l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x=1$ et $x=3$.	I est une mesure, en unités d'aire de l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $y=1$ et $y=3$.

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

On considère un système, électrique ou mécanique. On désigne par $e(t)$ le signal d'entrée et par $s(t)$ le signal de sortie.



On note $E(p) = \mathscr{L}(e(t))$ et $S(P) = \mathscr{L}(s(t))$, où $\mathscr{L}$ est la transformée de Laplace.
On désigne par $\mathscr{U}$ la fonction échelon unité définie par $\mathscr{U}(t) = 0$ si $t < 0$ et $\mathscr{U}(t) = 1$ si $t \geqslant 0$.
L'équation différentielle régissant ce système s'écrit :

$$2s'(t) + s(t) = e(t),$$

où la fonction inconnue s vérifie $s(t) = 0$ pour tout nombre réel t négatif ou nul (en particulier $s(0+) = 0$).

A. Étude du signal d'entrée

On suppose que le signal d'entrée e est donné par :

$$e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant t < 1 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \text{ ou } t \geqslant 1. \end{cases}$$

1. **a.** Sur une feuille de papier millimétré, tracer, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de e sur l'intervalle $[-1\,;\,4]$. On prendra comme unité 2 cm pour l'axe des abscisses et 5 cm pour l'axe des ordonnées.

   b. Justifier, par exemple à l'aide d'un tableau, que, pour tout nombre réel t :

$$e(t) = \mathscr{U}(t) - \mathscr{U}(t-1).$$

2. **a.** Déterminer $\mathscr{L}(\mathscr{U}(t))$ et $\mathscr{L}(\mathscr{U}(t-1))$.

   b. En déduire $E(p)$.

B. Recherche de la transformée de Laplace du signal de sortie

1. Exprimer à l'aide de $S(p)$:

   a. $\mathscr{L}(s'(t))$.

   b. $\mathscr{L}(2s'(t) + s(t))$.

2. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle, montrer que $S(p) = \dfrac{1}{p(2p+1)}\left(1 - \mathrm{e}^{-p}\right)$.

3. Vérifier que, pour tout nombre réel p, on a : $\dfrac{1}{p(2p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+\frac{1}{2}}$.

4. En déduire que $S(p)$ peut s'écrire : $S(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\mathrm{e}^{-p}}{p} - \dfrac{1}{p+\frac{1}{2}} + \dfrac{\mathrm{e}^{-p}}{p+\frac{1}{2}}$.

C. Obtention du signal de sortie

On recherche l'original de $S(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\mathrm{e}^{-p}}{p} - \dfrac{1}{p+\frac{1}{2}} + \dfrac{\mathrm{e}^{-p}}{p+\frac{1}{2}}$.

1. Un logiciel de calcul formel fournit l'affichage suivant.

```
>>> inverselaplacetransform(1/p-exp(-p)/p-1/(p+1/2)+exp(-p)/(p+1/2), p, t)
```
$$\theta(t)-\theta(t-1)-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\theta(t)+\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\theta(t-1)$$

Le logiciel note θ la fonction échelon unité désignée par $\mathcal{U}$ dans cet exercice.
En utilisant cet affichage et le formulaire, donner les originaux de :

$$\frac{1}{p} \quad ; \quad \frac{\mathrm{e}^{-p}}{p} \quad ; \quad \frac{1}{p+\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{e}^{-p}}{p+\frac{1}{2}}$$

Donner une expression de s à l'aide de $\mathcal{U}$.

2. a. Préciser $s(t)$ sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0]$.

b. Soit t un nombre réel dans l'intervalle $[0\,;\,1[$. Montrer que $s(t)=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$.

c. Soit t un nombre réel dans l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$. Montrer que $s(t)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-1\right)$.

3. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant, où $s(t)$ est arrondi au centième.

t	-1	$-0,5$	0	0,5	0,75	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$s(t)$	0											

4. Sur le graphique de la partie A, représenter la fonction s sur l'intervalle $[-1\,;\,4]$.