

# Brevet de Technicien Supérieur ROC

Session 2007

## Epreuve de Mathématiques

durée: 2h

### EXERCICE 1 (10 points)

Le but du problème est l'étude de la demande et l'offre pour un nouveau produit de grande consommation. Une étude statistique a donné les résultats suivants où:

$x$  désigne le prix unitaire en euros du produit;

$y$  désigne la demande (la quantité de produit demandée par les consommateurs), en milliers d'unités;

$z$  désigne l'offre (la quantité de produit offerte sur la marché par les producteurs), en milliers d'unités;

$x$ en euros	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$y$ en milliers	7,8	6,1	4,7	3,7	3	2,5	2,2	2
$z$ en milliers	0,9	1,4	1,7	1,9	2,1	2,3	2,4	2,6

### - Partie A – Etude de la demande

On considère l'équation différentielle (E):  $y' + 0,4y = 0,4x - 1$  où  $y$  désigne une fonction de la variable  $x$ , définie et dérivable sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels et  $y'$  sa fonction dérivée.

1) Résoudre sur l'ensemble des nombres réels, l'équation différentielle:  $y' + 0,4y = 0$

2) a) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que la fonction  $g$ , définie pour tout  $x$  réel par  $g(x) = ax + b$  soit une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation différentielle (E)

3) Déterminer la fonction  $f$ , solution sur l'ensemble des nombres réels de l'équation différentielle (E), telle que  $f(0) = 10$

4) On appelle  $d$  la demande, en milliers d'unités pour un prix de  $x$  euros, définie sur l'intervalle  $[0,5; 4]$  par  $y = d(x)$ . On admet que, pour tout  $x$  de l'intervalle  $[0,5; 4]$ ,  $d(x) = 15e^{-0,4x} + x - 5$

a) Soit  $d'$  la fonction dérivée de la fonction  $d$ . Déterminer  $d'(x)$  et en déduire les variations de la fonction  $d$  sur l'intervalle  $[0,5; 4]$

b) Le plan est muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 2cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées. On admet que le tableau de valeurs ci-dessus est le tableau de valeurs de la fonction  $d$  définie par  $y = d(x)$ .

Construire la courbe  $C_d$  représentative de la fonction  $d$  sur l'intervalle  $[0,5; 4]$

### - Partie B – Etude de l'offre

1) a) Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant. Les résultats seront arrondis à  $10^{-2}$

$x$	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$z$	0,9	1,4	1,7	1,9	2,1	2,3	2,4	2,6
$Z = e^z$	2,46							

b) Donner une équation de la droite de régression de  $Z$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés sous la forme  $Z=ax+b$  où  $a$  et  $b$  seront arrondis du dixième.

c) En déduire une expression de  $z$  en fonction de  $x$

2) On appelle  $h$  la fonction offre, en milliers d'unités pour un prix de  $x$  euros, définie sur l'intervalle  $[0,5;4]$  par  $z=h(x)$ . On admet que, pour tout  $x$  de l'intervalle  $[0,5;4]$ ,  $h(x)=\ln(3x+0,9)$

a) Soit  $h'$  la fonction dérivée de la fonction  $h$ . Déterminer  $h'(x)$  et en déduire les variations de la fonction  $h$  sur l'intervalle  $[0,5;4]$

b) Construire la courbe  $C_h$  représentative de la fonction  $h$  dans le même repère que la courbe  $C_d$

*On pourra utiliser le tableau de valeurs ci-dessus.*

c) Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, une valeur approchée du prix de vente en euros, à 10 centimes près, pour lequel la demande est égal à l'offre.

## EXERCICE 2 (10 points)

*Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.*

Une entreprise produit en grande série trois modèles de stylos notés  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ .

Un stylo peut être conforme ou non conforme.

– **Partie A – Dans cette partie, on s'intéresse aux stylos du modèle  $M_1$**

Un des stocks est constitué de stylos du modèle  $M_1$ , provenant de deux chaînes de production  $C_1$  et  $C_2$ . Ces chaînes produisent respectivement 40% et 60% du stock. On constate que la chaîne  $C_1$  produit 6% de stylos non conformes.

On prélève au hasard un stylo dans ce stock.

1) Quelle est la probabilité de prélever au hasard un stylo provenant de la chaîne  $C_1$  et non conforme?

2) On appelle  $t$  le pourcentage de stylos non conformes produit par la chaîne  $C_2$ . Déterminer  $t$  pour que la probabilité de prélever au hasard un stylo non conforme dans le stock de stylos du modèle  $M_1$  soit égale à 0,09.

– **Partie B – Dans cette partie, on s'intéresse aux stylos du modèle  $M_2$**

Un autre stock est constitué de stylos du modèle  $M_2$ . On admet que 3% des stylos de ce stock sont non conformes. On prélève au hasard, dans ce stock, un lot de 50 stylos. On admet que ce stock est suffisamment grand pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise. On note  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de 50 stylos, associe le nombre de stylos non conformes.

1) Déterminer la loi de probabilité de la variable  $X$ . Justifier la réponse et précisez les paramètres.

2) Dans cette question les résultats seront arrondis à  $10^{-3}$

a) Quelle est la probabilité que ce lot contienne exactement 2 stylos non conformes?

b) Quelle est la probabilité que ce lot contienne au moins 2 stylos non conformes?

3) a) On approche la variable aléatoire  $X$  par une variable aléatoire  $Y$  qui suit une loi de Poisson. Donner le paramètre de cette loi.

b) A l'aide de la variable aléatoire  $Y$ , donner une estimation de la probabilité qu'il y ait exactement 47 stylos conformes dans ce lot.

- **Partie C – Dans cette partie, on s'intéresse aux stylos du modèle  $M_3$**

Un autre stock est constitué de stylos du modèle  $M_3$ . Ce stock est conforme quant à la masse si la moyenne des masses des stylos de ce stock est de 11 grammes. Pour vérifier cette affirmation on construit un test d'hypothèse bilatéral au risque de 10%.

1) a) Quelle est l'hypothèse nulle  $H_0$  ? Quelle est l'hypothèse alternative  $H_1$  ?

b) On note  $\bar{Z}$  la variable aléatoire qui, à tout échantillon aléatoire de 100 stylos prélevés dans ce stock, associe la moyenne des masses des stylos de ce stock. On considère ces prélèvements comme des tirages avec remise car ce stock est très important. On suppose que, sous l'hypothèse nulle  $H_0$ , la variable aléatoire  $\bar{Z}$  suit la loi normale de moyenne 11 et d'écart type 0,4.

Sous l'hypothèse nulle  $H_0$ , déterminer le nombre réel positif  $h$  tel que:

$$P(11-h \leq \bar{Z} \leq 11+h) = 0,9$$

2) On prélève un échantillon de 100 stylos et on constate que la moyenne des masses des stylos de cet échantillon est de 10,6 grammes. Peut-on au risque de 10% conclure que le stock de stylos du modèle  $M_3$  est conforme quant à la masse?