Exo 1

A/ Résolution d'une équation diff :

(E) : $y'' + 2y' + \frac{5}{4} y = 0$

1°/ éq caractéristique : $r^2 + 2r + \frac{5}{4} = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 5 = -1 = i^2$

$\Rightarrow r_1 = \frac{-2+i}{2} = -1 + \frac{1}{2} i$ et $r_2 = \frac{-2-i}{2} = -1 - \frac{1}{2} i$

La solution est donc :

$y(t) = (\lambda \cos \beta t + \mu \sin \beta t) . e^{\alpha t}$ avec $\alpha = -1$, $\beta = +\frac{1}{2}$.

$$\boxed{y(t) = \left[\lambda \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right] e^{-t}}$$

2°/ solution particulière :

$f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = (\lambda \cos 0 + \mu \sin 0)\, e^0 = 0$.

$\Rightarrow f(0) = 0 \; \boxed{\lambda = 0}$

$f'(0) = 1$ calculons la dérivée de $f(t) = y(t)$.

$$f'(t) = \left[\lambda \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \mu \sin\left(t/2\right)\right]' e^{-t} + \left(e^{-t}\right)' \left[\lambda \cos(t/2) + \mu \sin(t/2)\right].$$

$$f'(t) = \left[-\lambda . \frac{1}{2} . \sin(t/2) + \frac{1}{2} \mu . \cos(t/2)\right] e^{-t} - t\, e^{-t} \left[\lambda \cos(t/2) + \mu \sin(t/2)\right].$$

$f'(0) = \left(\frac{1}{2} \mu .\right) e^{-0} = 1 \Rightarrow \boxed{\mu = 2.}$

Finalement : $\boxed{f(t) = 2 \sin(t/2)\, e^{-t}}$

B/ Étude d'une fonction:

1°/ a) $x \longmapsto e^{-x}$.

D'après le Formulaire : $e^{t} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n . \varepsilon(t)$.

Dans notre cas $t = -x$ Alors :

$$e^{-x} = 1 + \frac{(-x)}{1!} + \frac{(-x)^2}{2!} + (-x)^n . \varepsilon(-x).$$

$$\boxed{e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)} \quad \text{(à l'ordre 2)}.$$

b) $x \longmapsto \sin(\frac{1}{2} x)$.

D'après le Formulaire : $\sin(t) = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$

Dans notre cas :

$$\boxed{\sin(\tfrac{1}{2} x) = \frac{\frac{1}{2} x}{1!} - \frac{(\frac{1}{2} x)^3}{3!} + (\tfrac{1}{2} x)^5 \varepsilon(t)} \quad \text{(à l'ordre 2)}.$$

c) $f(x) = 2 \sin(\frac{1}{2} x) \cdot e^{-x}$.

Donc son développement limité au voisinage de zéro sera :

$$f(x) = 2\left[1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)\right]\left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{8}\frac{x^3}{6} + \frac{1}{32} x^5 \varepsilon(x)\right].$$

en faisant le produit on obtient :

$$f(x) = 2\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} \varepsilon(x)\right).$$

$$f(x) = x - x^2 + x^2 \varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

2°/ $f(x) = 2\, e^{-x} \sin \frac{1}{2} x$.

$x_0 = 0$ l'eq de la tangente est :

$$y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0).$$

calculons $f'(x) = 2.(-e^{-x}) \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 2\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right) e^{-x}$.

$$f'(x) = -2\, e^{-x} \sin \frac{1}{2} x + \cos\left(\frac{1}{2}x\right) e^{-x}.$$

D'où $f'(x_0) = f'(0) = 1$.

et $f(x_0) = f(0) = 0$.

Finalement : $y = (x - 0) + 0 \Rightarrow \boxed{y = x.}$

3°/ au voisinage de zero $f(x) = x - x^2$ (car $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$).

et $y = x$.

Donc $f(x) - y = (x - x^2) - x$

$\Rightarrow f(x) - y = -x^2$.

Etudions le signe de cette différence :

$f(x) - y = -x^2$ est toujours < 0

par conséquent $\mathcal{C}_f$ (courbe représentative de f) est toujours en dessous de la courbe de (T).

Exo 2.

$$f(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \sqrt{x}$$

A/ Etude de la variation et courbe :

1°/ $f(0) = 0$. $\quad f(3) = 2 \cdot e^{-3/2} \cdot \sqrt{3}$ (faire le calcul).

2°/ a) $\forall x \in]0;3]$ $\quad f'(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}x}(1-x)}{\sqrt{x}}$.

$$f'(x) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}x} \sqrt{x} + 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

$$f'(x) = -e^{-\frac{1}{2}x} \sqrt{x} + \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{x}}.$$

$$f'(x) = \frac{-x\, e^{-\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{x}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}x}(1-x)}{\sqrt{x}}.$$

b) $\sqrt{x} > 0 \quad \forall x \in]0;3]$.

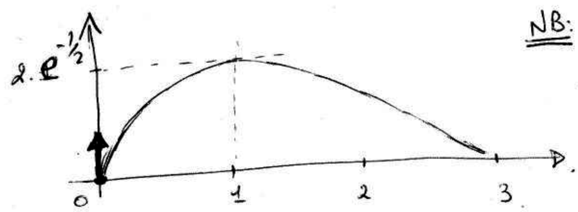
$e^{-\frac{1}{2}x} > 0 \quad \forall x \in]0;3]$

$\Rightarrow$ le signe de f' ne dépend que de $(1-x)$:

Tableau de signe :

x	0		1		3
$(1-x)$	‖	+	0	−	
f'	‖	+	0	−	
f	‖ 0	↗	$2 \cdot e^{-\frac{1}{2}}$	↘	$f(3)$

3°/



NB: le tracé de la courbe n'est pas précis je ne possède pas de calculette.

B. Calcul d'intégral :

$$V = \int_0^3 \pi \left(f(x)\right)^2 dx.$$

1°/ $V \overset{?}{=} \int_0^3 4\pi \; x e^{-x} dx.$

$$V = \int_0^3 \pi \left(2.\, e^{-\frac{1}{2}x} \sqrt{x}\right)^2 dx = 4\pi \int_0^3 \left(e^{-\frac{1}{2}x} \sqrt{x}\right)^2 dx.$$

$V = 4\pi \int_0^3 x.e^{-x}.$ Donc c'est vrai.

Rq : $\left(e^{-\frac{1}{2}x}\right)^2 = e^{-\frac{2}{2}x} = e^{-x}.$

et $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x.$

2°/ intégration par partie :

on pose $u = x \longrightarrow u' = 1$

$v' = e^{-x} \longrightarrow v = \frac{1}{(-1)} e^{-x} = -e^{-x}.$

$$\int_0^3 u v' = \left[u.\, v\right]_0^3 - \int_0^3 u' v.$$

D'où : $\frac{V}{4\pi} = \left[-x.\, e^{-x}\right]_0^3 - \int_0^3 -e^{-x} dx.$

$$\frac{V}{4\pi} = \left(-3e^{-3} - 0\right) + \int_0^3 e^{-x} dx$$

$$\frac{V}{4\pi} = -3e^{-3} + \left[\frac{1}{-1} e^{-x}\right]_0^3$$ car une primitive de $e^{-x} = -e^{-x}.$

D'où :

$$\frac{V}{4\pi} = -3e^{-3} - e^{-3} + e^0.$$

$$\frac{V}{4\pi} = -4e^{-3} + 1 \Rightarrow \boxed{V = 4\pi\left(1 - \frac{4}{e^3}\right)}$$

3°/ faite le calcul.

Exo 3

$P_1(0,1)$ $P_2(2,1)$ $P_3(4,3)$ $P_4(6,1)$.

1°/ $t \in [0;1]$ $R_i(t) = 3 \sum_{j=0}^{j=2-i} (-1)^j \frac{(t+2-i-j)^2}{j!\,(3-j)!}$

$\forall t \in [0;1]$ $R_0(t) = \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}$

En effet il suffit de poser $i=0$ et de le remplacer dans l'expression :

$$R_0(t) = 3 \sum_{j=0}^{j=2} (-1)^j \frac{(t+2-j)^2}{j!\,(3-j)!}$$

$$\Rightarrow \frac{R_0(t)}{3} = (-1)^0 \frac{(t+2)^2}{0!\,(3)!} + (-1)^1 \frac{(t+1)^2}{1!\,(2)!} + (-1)^2 \frac{t^2}{2!\,1!}$$

$$\Rightarrow \frac{R_0(t)}{3} = \frac{(t+2)^2}{6} - \frac{(t+1)^2}{2} + \frac{t^2}{2}$$

$$\frac{R_0(t)}{3} = \frac{t^2+4t+4-\cancel{3t^2}-6t-3\cancel{+3t^2}}{6}$$

$$\frac{R_0(t)}{3} = \frac{t^2-2t+1}{6} = \frac{t^2}{6} - \frac{t}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{R_0(t) = \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}}.$$

2°/ Γ_1 est l'ensemble des points $M_1(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM_1}(t) = R_0(t)\cdot\overrightarrow{OP_1} + R_1(t)\,\overrightarrow{OP_2} + R_2(t)\,\overrightarrow{OP_3}$$

Γ_2 est l'ensemble des point $M_2(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM_2}(t) = R_0(t)\cdot\overrightarrow{OP_2} + R_1(t)\,\overrightarrow{OP_3} + R_2(t)\,\overrightarrow{OP_4}.$$

a) Montrons que $\Gamma_1 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = f_1(t) = 2t+1. \\ y_1 = g_1(t) = t^2+1. \end{cases}$ $t\in[0,1]$.

Exprimons les vecteurs $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$ et $\overrightarrow{OP_3}$ avec leur coordonnées :

$\overrightarrow{OP_1}\,(0\,;1)$ $\quad\overrightarrow{OP_2}\,(2\,;1)$ $\quad\overrightarrow{OP_3}\,(4\,;3)$ $\quad\overrightarrow{OP_4}\,(6\,;1)$.

sachant que $R_0(t) = \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}$.

$R_1(t) = -t^2+t+\frac{1}{2}$

$R_2(t) = \frac{1}{2}t^2$.

Alors : $\overrightarrow{OM_1}(t) = \left(\frac{t^2}{2}-t+\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OP_1} + \left(-t^2+t+\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OP_2} + \left(\frac{1}{2}t^2\right)\overrightarrow{OP_3}$.

$$\overrightarrow{OM_1}(t) = \left(\frac{t^2}{2}-t+\frac{1}{2}\right)(0\vec{i}+\vec{j}) + \left(-t^2+t+\frac{1}{2}\right)(2\vec{i}+\vec{j}) + \left(\frac{1}{2}t^2\right)(4\vec{i}+3\vec{j}).$$

$$\overrightarrow{OM_1}(t) = \left(\frac{t^2}{2}-t+\frac{1}{2}\right)\vec{j} + (-2t^2+2t+1)\vec{i} + \left(-t^2+t+\frac{1}{2}\right)\vec{j} + 2t^2\vec{i} + \frac{3}{2}t^2\vec{j}.$$

$$\overrightarrow{OM_1}(t) = \left(-2t^2+2t+1+2t^2\right)\vec{i} + \left(\frac{t^2}{2}-t+\frac{1}{2}-t^2+t+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}t^2\right)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OM_1}(t) = (2t+1)\,\vec{i} + (t^2+1)\,\vec{j}.$$

$$\begin{cases} x_1 = 2t+1 = f_1(t) \\ y_1 = t^2+1 = g_1(t). \end{cases}$$

b) étude les variations de de f_1 et g_1 sur $[0;1]$.

- $f_1(t) = 2t+1$.

  * fonction affine, coeff directeur $a = 2 > 0$

  donc f_1 ↗ sur $[0;1]$.

- $g_1(t) = t^2+1$.

  * $g_1'(t) = 2t$. $g_1'(t) > 0$ donc $g_1(t)$ ↗ sur $[0;1]$

t	0		1
f_1	1	↗	3
g_1	1	↗	2

c) $\begin{cases} x_2 = 2t+3 = f_2(t) \\ y_2 = -2t^2+2t+2 = g_2(t) \end{cases}$.

- $f_2(t) = 2t+3$

  f_2 ↗ sur $[0,1]$

t	0		1
f_2	3	↗	5

- $g_2(t) = -2t^2+2t+2$.

  $g_2'(t) = -4t+2$.

  Tableau de signe.

t	0		1/2		1.
g_2'		+	0	−	
g_2	2	↗	$\frac{5}{2}$	↘	2.

t	0		1/2		1
f_2	3	↗		↗	5
g_2	2	↗	5/2	↘	2

d/ l'éq d'une tangte est : $y = f'(a)\ (x-a) + f(a)$.

Dans notre Cas • Si $\boxed{a=0}$

$y = f_1'(0)\ (t) + f_1(0)$

$\Rightarrow \boxed{y = 2t + 1}$

• Si $\boxed{a=1}$

$y = f_1'(1)\ (t-1) + f_1(1)$.

$\Rightarrow y = 2(t-1) + 3$.

$\boxed{y = 2t + 1}$

Refaire le même calcul. pour la fonction $g_1(t)$.

e) même calcul Mais avec les fonctions f_2 et la fonction g_2.

$a = 0$	$a = \frac{1}{2}$	$a = 1$.

f) je vous laisse le soin de calculer les équation de ces droites et les tracées, ainsi que la courbe Γ_1 et Γ_2.

ce n'est vraiment pas difficile.

"Si Pb signalez-le moi".

3°)