

# BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

## "CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS"

**SESSION 2005**

**\*\*\***

### EPREUVE DE MATHEMATIQUES

**Durée : 3 heures**

**Coefficient : 2**

**La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction  
interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.**

**L'usage des instruments de calcul et du formulaire  
de mathématiques est autorisé.**

Le sujet comprend 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.  
Il comprend 4 pages numérotées de 1 à 4.

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS		SESSION 2005
CPMAT	DUREE : 3 h	Coefficient : 2
MATHEMATIQUES		Page 1/6

## EXERCICE 1 (9 points)

*Les trois parties A, B, C de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.*

A. On considère l'équation différentielle  $(E_1)$  :  $y' + y = -e^{-x}$   
où  $y$  est une fonction de la variable réelle  $x$ , définie et dérivable sur  $\mathbf{R}$ , et  $y'$  sa fonction dérivée.

1° Déterminer les solutions de l'équation différentielle  $(E_0)$  :  $y' + y = 0$ .

2° Montrer que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $g(x) = -xe^{-x}$ , est une solution particulière de l'équation différentielle  $(E_1)$ .

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $(E_1)$ .

4° Déterminer la solution particulière  $f_1$  de l'équation différentielle  $(E_1)$  qui vérifie la condition initiale  $f_1'(0) = 0$ .

B. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par  $g(x) = -xe^{-x}$ .

1° On note  $I = \int_0^{0,1} g(x) dx$ .

Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que  $I = 1,1 e^{-0,1} - 1$ .

2° a) À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle  $t \mapsto e^t$ , donner le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction  $x \mapsto e^{-x}$ .

b) En déduire que le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction

$g$  est :  $g(x) = -x + x^2 - \frac{x^3}{2} + x^3 \varepsilon(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ .

3° On note  $J = \int_0^{0,1} (-x + x^2 - \frac{x^3}{2}) dx$ .

Démontrer que  $J = -\frac{0,1123}{24}$ .

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS		SESSION 2005
CPMAT	DUREE : 3 h	Coefficient : 2
MATHEMATIQUES		Page 2/6

4° On considère l'affirmation suivante : le nombre  $I - J$  est inférieur à  $10^{-6}$ .  
Cette affirmation est-elle vraie ?

C. On considère l'équation différentielle ( $E_2$ ) :  $y'' - y = 2e^{-x}$ ,  
où  $y$  est une fonction de la variable réelle  $x$ , définie et deux fois dérivable sur  $\mathbf{R}$ , et  $y''$  sa  
fonction dérivée seconde.

1° Déterminer les solutions de l'équation différentielle ( $E$ ) :  $y'' - y = 0$ .

2° On admet que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $g(x) = -xe^{-x}$  est une solution  
particulière de l'équation différentielle ( $E_2$ ).  
En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle ( $E_2$ ).

3° Déterminer la solution particulière  $f_2$  de l'équation différentielle ( $E_2$ ) qui vérifie les  
conditions initiales  $f_2(0) = 0$  et  $f_2'(0) = 0$ .

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS		SESSION 2005
CPMAT	DUREE : 3 h	Coefficient : 2
MATHEMATIQUES		Page 3/6

## EXERCICE 2 (7 points)

*Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.*

Dans le cadre d'accords sur la formation professionnelle, une grande entreprise a proposé à ses personnels un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel de conception industrielle.

**Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à  $10^{-2}$ .**

A. On note  $E$  l'événement : « une personne de l'entreprise dont le nom a été tiré au hasard a suivi le stage ».

On suppose que  $P(E) = 0,3$ .

On tire au hasard le nom de  $n$  personnes de cette entreprise. On suppose l'effectif suffisamment important pour pouvoir assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

1° Dans cette question on prend  $n = 15$ .

On considère la variable aléatoire  $X$  qui, à tout prélèvement de 15 noms, associe le nombre de personnes ayant suivi le stage.

- Justifier que la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
- Déterminer la probabilité qu'une personne au plus parmi les 15 dont le nom a été tiré au hasard ait suivi le stage.

2° Dans cette question on prend  $n = 150$ .

On considère la variable aléatoire  $Y$  qui, à tout prélèvement de 150 noms, associe le nombre de personnes ayant suivi le stage.

On admet que la variable aléatoire  $Y$  suit la loi binomiale de paramètres  $n = 150$  et  $p = 0,3$ . On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire  $Y$  par la loi normale de moyenne 45 et d'écart type 5,6.

On note  $Z$  une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 45 et d'écart type 5,6.

- Justifier les paramètres de cette loi normale.
- Calculer la probabilité qu'au plus 40 personnes, parmi les 150 dont le nom a été tiré au hasard, aient suivi le stage, c'est à dire calculer  $P(Z \leq 40,5)$ .

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS		SESSION 2005
CPMAT	DUREE : 3 h	Coefficient : 2
MATHEMATIQUES		Page 4/6

B. Dans cette entreprise 45 % du personnel a un niveau de qualification supérieur ou égal à « bac + 2 ».

L'événement  $A$  : « une personne de l'entreprise dont le nom a été tiré au hasard a un niveau supérieur ou égal à bac + 2 » a donc pour probabilité  $P(A) = 0,45$ .

On rappelle que l'événement  $E$  : « une personne de l'entreprise dont le nom a été tiré au hasard a suivi le stage » a pour probabilité  $P(E) = 0,3$ .

Enfin, 35 % des personnes dont le niveau de qualification est supérieur ou égal à « bac + 2 » ont suivi le stage. Ce qui permet d'en déduire la probabilité conditionnelle  $P_A(E) = 0,35$ , ou  $P(E|A) = 0,35$ .

1° Calculer la probabilité de l'événement : « une personne de l'entreprise dont le nom a été tiré au hasard a suivi le stage et a un niveau de qualification supérieur ou égal à bac + 2 ».

2° Calculer la probabilité de l'événement : « une personne dont le nom a été tiré au hasard parmi les noms des personnes ayant suivi le stage a un niveau supérieur ou égal à bac + 2 ».

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS		SESSION 2005
CPMAT	DUREE : 3 h	Coefficient : 2
MATHEMATIQUES		Page 5/6

### EXERCICE 3 (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , d'unité graphique 4 cm.

A tout nombre réel  $t$  de l'intervalle  $[0, 2]$ , on associe le point  $M(t)$  de coordonnées :  
 $x = f(t) = t^3 - 3t^2 + 3t$  et  $y = g(t) = [\ln(1 + t)]^2$ .

On note  $C$  la courbe ensemble des points  $M(t)$  obtenus lorsque  $t$  varie dans  $[0, 2]$ .

1° Etudier les variations des fonctions  $f$  et  $g$  sur  $[0, 2]$  et regrouper les résultats dans un même tableau.

2° Donner un vecteur directeur pour chacune des tangentes à la courbe  $C$  aux points  $M(0)$ ,  $M(1)$  et  $M(2)$ , obtenus pour  $t = 0$ ,  $t = 1$  et  $t = 2$ .

3° Tracer les tangentes définies à la question 2° et la courbe  $C$ .

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS		SESSION 2005
CPMAT	DUREE : 3 h	Coefficient : 2
MATHEMATIQUES		Page 6/6

# FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

## BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS

### 1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$$

$$a^t = e^{t \ln a}, \text{ où } a > 0$$

$$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}, \text{ où } t > 0$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$$

$$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$$

$$\sin t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it})$$

$$e^{a t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)), \text{ où } a = \alpha + i\beta$$

### 2. CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

#### a) Limites usuelles

##### Comportement à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 ;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0$$

##### Croissances comparées à l'infini

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$$

##### Comportement à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0 ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \ln t = 0 .$$

**b) Dérivées et primitives**

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	Arc sin $t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$e^t$	$e^t$	Arc tan $t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha$ ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )	$\alpha t^{\alpha-1}$	$e^{at}$ ( $a \in \mathbb{C}$ )	$ae^{at}$
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = k u'$$

$$(uv)' = u'v + u v'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u v'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

**c) Calcul intégral**

Valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$  :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$$

**d) Développements limités**

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + t^n \varepsilon(t)$$

**e) Equations différentielles**

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où $G$ est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$\alpha x'' + bx' + cx = 0$	Si $\Delta > 0$ , $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ ..... où $r_1$ et $r_2$ sont les racines de l'équation caractéristique
équation caractéristique :	Si $\Delta = 0$ , $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ ..... où $r$ est la racine double de l'équation caractéristique
$ax^2 + bx + c = 0$	Si $\Delta < 0$ , $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.
de discriminant $\Delta$	

### 3. PROBABILITES

a) **Loi binomiale**  $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$  où  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  ;  $E(X) = np$  ;  $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) **Loi de Poisson**

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

$k \backslash \lambda$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

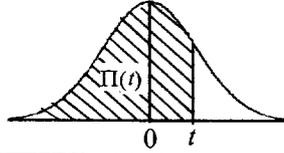
$k \backslash \lambda$	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000

c) **Loi normale**

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité :  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE  $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota :  $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$