Corrigé BTS CPI 98

I 1. f est paire, donc la plaque est symétrique par rapport à $y'y$.

2. $m_1 = \frac{1}{2} \times 20 \times 20 \times d = 200d$

3. $A_2 = 2\int_0^{10} 10 \cos \frac{\pi}{20} u \, du = 20 \times \frac{20}{\pi} \left[\sin \frac{\pi}{20} u\right]_0^{10} = \frac{400}{\pi}$ $\quad m_2 = \frac{400}{\pi} d$

4. $y_1 = \frac{1}{3}(-20) = -20/3$

5. $y_2 = \frac{\pi}{400d} \frac{d}{2} 2\int_0^{10} 100 . \cos^2 \frac{\pi}{20} u \, du = \frac{\pi}{4} \frac{1}{2} \int_0^{10} \left(1 + \cos \frac{\pi}{10} u\right) du$

$= \frac{\pi}{8} \left[u + \frac{10}{\pi} \sin \frac{\pi}{10} u\right]_0^{10} = \frac{5\pi}{4}$

6 $\quad y = (m_1 y_1 + m_2 y_2) / (m_1 + m_2) = -\frac{25}{3} \frac{\pi}{4+2\pi} \simeq -2.5$

Exercice 2- **-1-** $B_{0,3}(t) = C_3^0 t^0 (1-t)^3 = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1$ $\quad B_{1,3}(t) = C_3^1 t^1 (1-t)^2 = 3t(1-2t+t^2) = 3t^3 - 6t^2 + 3t$

$B_{2,3}(t) = C_3^2 t^2 (1-t)^1 = 3t^2(1-t) = -3t^3 + 3t^2$ $\qquad B_{3,3}(t) = C_3^3 t^3 (1-t)^0 = t^3$

-2- $x(t) = B_{0,3} x_{P_0} + B_{1,3} x_{P_1} + B_{2,3} x_{P_2} + B_{3,3} x_{P_3} = 0 + 0 + 10(-3t^3 + 3t^2) + 5t^3 = -25t^3 + 30t^2 = 5(6t^2 - 5t^3)$

$y(t) = B_{0,3} y_{P_0} + B_{1,3} y_{P_1} + B_{2,3} y_{P_2} + B_{3,3} y_{P_3} = 0 + 2(3t^3 - 6t^2 + 3t) + 2(-3t^3 + 3t^2) + 0 = -6t^2 + 6t = 6(t - t^2)$

-3- $f'(t) = 5(12t - 15t^2) = 15t(4-5t)$. Ce polynôme du second degré a 2 racines réelles 0 et 4/5; il est donc du signe de son coefficient de t^2, c'est -à-dire négatif sauf sur[0,4/5].
$g'(t) = 6(1-2t)$ est positif si $t < 1/2$, donc positif ou nul sur [0,1/2].

-4- En M(0)=(0,0), le vecteur tangent est V(0)=(f'(0),g'(0))=(0,6).
En M(4/5)=(32/5,24/25), le vecteur tangent est V(4/5)=(f'(4/5),g'(4/5))=(0,-18/5).

t	0		1/2		4/5		1
x'(t)	0	+	45/4	+	0	-	
x(t)	0		35/8		32/5		5
y'(t)	6	+	0	-	-18/5	-	-6
y(t)	0		3/2		24/25		0

II A 1. Les zéros de l'équation caractéristique $r^2 + 3r + 2$ sont -1 et -2

donc $y_0 = Ae^{-t} + Be^{-2t}$

A2 $\quad g(t) = (at^2 + bt)e^{-t}$

$g'(t) = (2at + b - at^2 - bt)e^{-t}$

$g''(t) = (2a - 2at - b - 2at - b + at^2 + bt)e^{-t}$

$g'' + 3g' + 2g = (2at + 2a + b)e$

$2a = 1 \quad a = 1/2$

$2a + b = 0 \quad b = -1$

A3 $\quad y = y_0 + g = Ae^{-t} + Be^{-2t} + \left(\frac{1}{2}t^2 - t\right)e^{-t}$ $\qquad y' = -Ae^{-t} - 2Be^{-2t} + \left(t - 1 - \frac{1}{2}t\right.$

A4 $\quad f(0) = A + B = 1$

$f'(0) = -A - 2B - 1 = -2$

$B = 0$, $A = 1$ $\qquad f(t) = e^{-t}\left(\frac{1}{2}t^2 - t + 1\right)$

B 1 $\quad f(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 - t + 1\right)e^{-t} = \left(\frac{1}{2}t^2 - t + 1\right)\left(1 - t + \frac{1}{2}t^2 + t^2\rho(t)\right)$

$= 1 - 2t + 2t^2 + t^2\rho(t)$

tangente : $y = 1 - 2t$ $\qquad 2t^2 \geq 0$ donc C est au dessus de T.

B 2 $\quad A(\lambda) = \int_0^\lambda f(t)dt = \left[\left(\frac{1}{2}t^2 - t + 1\right)(-e^{-t})\right]_0^\lambda - \int_0^\lambda (t-1)(-e^{-t})dt$

$= \left[-\left(\frac{1}{2}t^2 + 1\right)e^{-t}\right]_0^\lambda = 1 - \left(\frac{1}{2}\lambda^2 + 1\right)e^{-\lambda}$

$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0$ donc $\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = 1$.