

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS 1997
(CPI)
Mathématiques

Durée : 4 heures coefficient : 2

L'attention du candidat est attirée sur le fait que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul et de dessin, et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

EXERCICE 1 : (4 points)

On considère les équations différentielles (E_0) et (E) suivantes:

$$(E_0) : x.y' + y = 0$$

$$(E) : x.y' + y = \frac{1}{1+x^2}$$

où y représente une fonction de la variable réelle x , définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et y' représente la fonction dérivée de la fonction y .

1° Résoudre l'équation différentielle (E_0) .

2° Vérifier que la fonction h définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $x \rightarrow \frac{\text{Arctan}(x)}{x}$ est une solution de l'équation différentielle (E) .

3° Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) .

4° Déterminer la solution f de (E) qui satisfait la condition $f(1) = \frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 2 : (9 points)

Du point de vue des calculs à effectuer, les parties 1 et 2 de cet exercice sont indépendantes.

Le but de cet exercice est de calculer la durée de vie moyenne d'ampoules électriques issues de deux productions différentes.

Dans la partie 1° la durée de vie d'une ampoule de la production A (100000 ampoules) définit une variable aléatoire X qui suit une loi normale.

Dans la partie 2° la durée de vie d'une ampoule de la production B (100000 ampoules) définit une variable aléatoire Y dont on sait calculer l'espérance mathématique.

PARTIE I :

Dans cette partie, on désigne par X la variable aléatoire qui à toute ampoule de la production A associe la mesure, en heures, de sa durée de vie.

X suit la loi normale $N(m ; \sigma)$, de moyenne m et d'écart type σ .

1-1 Les résultats concernant les durées de vie des ampoules d'un échantillon aléatoire(e) de 100 ampoules ont été consignés par le constructeur dans le tableau suivant :

mesure, en heures, de la durée de vie	]1200 ; 1100]	]1100 ; 1050]	]1050 ; 1000]	]1000 ; 950]	]950 ; 750]	]750 ; 625]
nombre d'ampoules	10	23	29	27	6	5

En assimilant chaque mesure effectuée au centre de la classe à laquelle elle appartient, on obtient la série statistique suivante :

valeur de la variable	1150	1075	1025	975	850	625
effectif	10	23	29	27	6	5

On note respectivement m_e et σ_e la moyenne et l'écart type de cette série statistique.

Déterminer les valeurs arrondies à l'unité a et b de m_e et σ_e .

1-2 Les deux nombres a et b trouvés à la question précédente étant pris respectivement comme approximations de la moyenne et de l'écart type de l'échantillon (e), on retient :

- le nombre a comme estimation ponctuelle de m
- la valeur arrondie à l'unité de $b \sqrt{\frac{100}{99}}$ comme estimation ponctuelle s de σ .

Montrer que $s = 112$.

1-3 On note $\bar{X}$, la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 100 ampoules de la production A associe la mesure, en heures, de la durée de vie moyenne des ampoules de cet échantillon.

En admettant que $\bar{X}$ suit la loi normale de moyenne m et d'écart type $\frac{s}{\sqrt{100}}$, estimer la mesure, en heures, de la durée de vie moyenne m des ampoules de la production A avec un niveau de confiance de 95 %.

1-4 Au vu de l'échantillon ci-dessus, peut-on retenir, au risque de 5 %, une durée de 1000 heures comme durée de vie moyenne des ampoules de la production A ?

1-5 On suppose dans cette question que $m = 1000$ et $\sigma = 112$.

1-5-1 Calculer la probabilité pour que la durée de vie d'une ampoule soit supérieure à 1000 heures.

1-5-2 Calculer la probabilité pour que la durée de vie d'une ampoule soit inférieure à 900 heures.

PARTIE 2 :

Soient le nombre réel strictement positif a donné et f la fonction de la variable réelle t , définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \text{si } t \geq 0 & \text{alors } f(t) = a \cdot e^{-at} \\ \text{si } t < 0 & \text{alors } f(t) = 0 \end{cases}$$

2-1-1 Montrer que, pour tout t de $\mathbb{R}$, $f(t) \geq 0$.

2-1-2 Pour tout x réel strictement positif, calculer, en fonction de x et de a , l'intégrale

$$\int_0^x f(t) \, dt.$$

2-1-3 On pose $I(x) = \int_0^x f(t) \, dt$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x)$.

En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, dt = 1$.

2-2 Calculer, en fonction de x et de a , l'intégrale $\int_0^x t \cdot f(t) \, dt$.

On pose $J(x) = \int_0^x t \cdot f(t) \, dt$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} J(x)$.

2-3 Soit Y la variable aléatoire qui à toute ampoule de type B associe la mesure, en heures, de sa durée de vie.

La mesure, en heures, de la durée de vie moyenne des ampoules de la production B est l'espérance mathématique de Y notée $E(Y)$ et définie par $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t) \, dt$.

2-3-1 Exprimer $E(Y)$ en fonction de a .

2-3-2 Quelle doit être la valeur de a pour que la durée de vie moyenne des ampoules de la production B soit égale à 1000 heures ? Dans ce cas, pour tout t réel positif, exprimer $f(t)$ en fonction de t .

EXERCICE 3 : (7 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (Ox, Oy) d'unité graphique 1 cm ; on considère la courbe (C) ensemble de tous les points M de coordonnées $(x ; y)$ telles qu'il existe au moins un nombre t de l'intervalle $[0 ; 1]$ de sorte que :

$$\begin{cases} x = 60t(1-t) \\ y = 30t^2(1-t) \end{cases}$$

Le tracé de la courbe (C) est donné sur la feuille annexe.

1- On note f et g les fonctions de la variable t définies sur l'intervalle [0 ; 1] par :

$$\begin{cases} f(t) = 60t(1-t) \\ g(t) = 30t^2(1-t) \end{cases}$$

Étudier le sens de variation de f et de g et rassembler les résultats dans un unique tableau dans lequel on fera aussi apparaître les valeurs de f(t) et g(t) pour $t = 0$, $t = \frac{1}{2}$, $t = \frac{2}{3}$ et $t = 1$. (On indiquera les valeurs exactes).

2-1- Préciser les valeurs des coefficients directeurs des demi-tangentes à la courbe (C) au point O.

2-2- On note M_1 le point de (C) où la tangente à (C) est parallèle à (Oy).

Préciser les coordonnées $(x_1 ; y_1)$ du point M_1 .

2-3- On note M_2 le point de (C) où la tangente à (C) est parallèle à (Ox).

Préciser les coordonnées $(x_2 ; y_2)$ du point M_2 .

2-4- Construire sur la figure de l'annexe la tangente D_1 à (C) au point M_1 et la tangente D_2 à (C) au point M_2 .

2-5- On note M_0 le point de (C) de coordonnées $\left(f\left(\frac{1}{3}\right); g\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ et D_0 la tangente à la courbe (C) en son point M_0 .

Calculer les coordonnées de M_0 ainsi que le coefficient directeur de D_0 .

Construire sur la figure de l'annexe, la droite D_0 .

3- On note : Q le point d'intersection de l'axe (Ox) et de la droite D_0 .

R le point d'intersection de la droite D_0 et de la droite D_2 .

S le point d'intersection de la droite D_2 et de la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$.

3-1- Démontrer que le quadrilatère (OQRS) est un parallélogramme. Démontrer que la droite (QS) est parallèle à l'axe (Oy).

3-2- Exprimer, en cm^2 , l'aire du parallélogramme (OQRS). On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie au mm^2 .

4- On admet que l'aire du domaine plan (D) limité par la courbe (C) a pour mesure, en cm^2 , le nombre réel :

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (f(t) g'(t) - f'(t) g(t)) dt$$

(Dans cette formule f' et g' désignent respectivement les fonctions dérivées des fonctions f et g). Calculer la valeur exacte de l'aire de (D).

Annexe :

