

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS 1996
(CPI)
Mathématiques

Durée : 4 heures Coefficient : 2

L'attention du candidat est attirée sur le fait que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul et de dessin, et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

EXERCICE 1 (4 points)

Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation (E) d'inconnue z : $z^2 - (\sqrt{3} + i)z + 1 = 0$
(Le nombre i est le nombre complexe dont le module est égal à 1 et dont un argument est égal à $\frac{\pi}{2}$).

Cette équation possède deux racines complexes.

1° a) Sans calculer les racines de (E), donner la valeur de leur produit.

b) Dédurre de la question précédente une relation entre les arguments des deux racines de (E).

2° a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est égal à $(1 + i\sqrt{3})^2$.

b) Déterminer les racines z_1 et z_2 de l'équation (E) ; on notera z_1 la racine dont la partie imaginaire est positive.

3° Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm.

L'axe des abscisses est noté (Ox) et celui des ordonnées (Oy).

On appelle M_1 , M_2 et I les points d'affixes respectives z_1 , z_2 et i .

a) Montrer que le point M_1 est un point de la droite d'équation $y = x$.

b) Montrer que les points M_1 et M_2 appartiennent au cercle de centre I et de rayon $\sqrt{2}$.

c) Construire le point M_1 puis, en utilisant la question a), construire le point M_2 .

EXERCICE 2 (5 points)

Une machine fabrique 10 000 pièces rectangulaires par jour. Une pièce est acceptable si la mesure, en mm, de sa longueur, appartient à l'intervalle $[519,95 ; 522,45]$.

Une pièce acceptable procure à l'entreprise un gain de 4 francs et une pièce défectueuse une perte de 60 francs.

On suppose que la longueur X (exprimée en mm) des pièces produites sur la journée suit la loi normale de moyenne 521,2 et d'écart type σ .

1° Le 5 février 1996, la machine était réglée de sorte que $\sigma = 0,565$.

a) Déterminer le pourcentage de pièces acceptables fabriquées lors de cette journée. (On en donnera la valeur arrondie à 10^{-2} près).
Ce 5 février 1996, l'entreprise a-t-elle été bénéficiaire ?
Si oui, indiquer quel est le montant du bénéfice B qui a été réalisé ce jour (On en donnera la valeur arrondie à 10^3 près).

b) Sans modifier la moyenne, quel aurait du être la valeur de l'écart type pour que le bénéfice B de la journée atteigne 32 000 francs ?

2° Chaque jour, une intervention technique sur la machine permet, tout en conservant la même moyenne, de donner à l'écart type une valeur σ prise dans l'intervalle $[0,4 ; 0,565]$.

On désigne par δ la différence $(0,565 - \sigma)$. Le nombre δ représente la baisse de l'écart type relativement à la référence 0,565.

Pour une journée donnée, on appelle profit journalier de l'entreprise, exprimé en francs, la différence entre le bénéfice B de la journée, exprimé en francs, et le coût C de l'intervention, exprimé en francs.

L'expérience a montré que le profit journalier peut être apprécié, relativement à δ , par la fonction P définie sur l'intervalle $[0 ; 0,165]$ par $\delta \rightarrow 10^3 (100 \cdot \delta - 5e^{8\delta} + 28)$.

a) Déterminer la valeur de δ pour laquelle le profit journalier est maximum ; en déduire la valeur correspondante σ_0 de l'écart type.

b) On fait le bilan de la journée du 7 février 1996. La valeur de l'écart type était σ_0 .

Calculer le pourcentage de pièces acceptables produites (On donnera la valeur arrondie à 10^{-2} près).

En déduire le bénéfice B du jour et le coût C de l'intervention (On donnera les valeurs arrondies de B et C à 10^3 près).

EXERCICE 3 (11 points)

Partie A :

Soit l'équation différentielle (E) $xy' - y = \frac{2x^2}{2x + 1}$

(y représente une fonction de la variable x définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et y' représente la fonction dérivée de y).

1° Résoudre l'équation différentielle (E_1) $xy' - y = 0$

(où y représente une fonction de la variable x dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et y' la fonction dérivée de y).

2° Soit u une fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, dont la fonction dérivée est notée u' .

Montrer que si, pour tout x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $u'(x) = \frac{2}{2x+1}$ alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $x \rightarrow x.u(x)$ est une solution particulière de (E).

3° Donner une solution particulière de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution particulière h de l'équation différentielle (E) vérifiant $h(1) = \ln(3)$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -\frac{1}{2} ; +\infty[$ par $x \rightarrow x \ln(2x + 1)$.

1° Calculer la limite de f(x) quand x tend vers $-\frac{1}{2}$ et la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$.

2° f' désigne la fonction dérivée première de f et f'' sa fonction dérivée seconde.

a) Pour tout x de l'intervalle $] -\frac{1}{2} ; +\infty[$, calculer f'(x) et f''(x).

b) Calculer f'(0). En déduire, pour tout x de l'intervalle $] -\frac{1}{2} ; +\infty[$, le signe de f'(x).

c) Etudier le sens de variation de f sur l'intervalle $] -\frac{1}{2} ; +\infty[$.

3° a) Ecrire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $x \rightarrow \ln(1 + 2x)$. (On pourra utiliser le formulaire).

b) En déduire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de f.

4° Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

On note (C) et (P) les courbes représentant, dans ce plan, respectivement la fonction f et la fonction $x \rightarrow 2x^2$ définie sur l'intervalle $] -\frac{1}{2} ; +\infty[$.

a) Préciser les positions relatives de (C) et (P) au voisinage du point O.

b) Tracer les courbes (C) et (P).

5° Sur le graphique précédent, on considère le domaine D constitué par les points de coordonnées (x,y) telles que :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ f(x) \leq y \leq 2x^2 \end{cases}$$

On se propose de calculer l'aire A de D.

a) Calculer les réels a, b et c tels que, pour tout x réel de l'intervalle $] -\frac{1}{2}; +\infty[$,

$$\frac{x^2}{2x+1} = ax + b + \frac{c}{2x+1}.$$

b) Dédurre de la question précédente (5°a)) la valeur exacte de l'intégrale :

$$\int_0^2 \frac{x^2}{2x+1} dx.$$

c) Par une intégration par parties montrer que :

$$\int_0^2 x \ln(2x+1) dx = 2 \ln(5) - \int_0^2 \frac{x^2}{2x+1} dx.$$

d) Calculer l'aire A de D. Donner la valeur arrondie de A au mm² près.
