# BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS 1995
# (CPI)
# Mathématiques

Durée : 3 heures coefficient : 2

*L'attention du candidat est attirée sur le fait que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*L'usage des instruments de calcul et de dessin, et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.*

**EXERCICE 1** (5 points)

Un grand magasin propose en location des nettoyeurs à haute pression. Une enquête statistique portant sur plusieurs années antérieures montre que l'on peut estimer à $p = 0{,}02$ la probabilité pour que, pendant une année donnée, un nettoyeur pris en location soit remis au magasin en mauvais état de fonctionnement.

A chaque centaine d'appareils loués pendant l'année, on associe la variable aléatoire X indiquant le nombre d'appareils parmi cette centaine qui sont remis en mauvais état de fonctionnement.

On admet que X suit une loi binomiale.

**1°** Quels sont les paramètres de cette loi ?

**2°** Calculer la probabilité pour que sur la centaine d'appareils deux d'entre eux au plus soient rendus en mauvais état de fonctionnement.
On donnera une valeur décimale approchée à $10^{-2}$ près.

**3°** Déterminer l'espérance mathématique de X.

**4°** On admet que la loi de probabilité de X peut être approchée par une loi de Poisson. Quel est le paramètre $\lambda$ de cette loi de Poisson ?

En utilisant la table fournie dans le formulaire, calculer la probabilité pour que cinq appareils au moins sur la centaine soient rendus en mauvais état de fonctionnement.

**EXERCICE 2** (7 points)

Le but de l'exercice est la résolution de l'équation différentielle (E) :

$$(E) \quad x(x^2+1)\,y' - 2y = x^3 (x-1)^2 e^{-x}$$

où y représente une fonction de la variable réelle x, dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

**1° a)** Déterminer les trois réels a, b, c tels que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ :

$$\frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

**b)** En déduire une primitive sur l'intervalle ]0 ; +∞ [ de la fonction :

$$x \to \frac{2}{x\,(x^2+1)}$$

**2°** Résoudre sur l'intervalle ]0 ; +∞ [. l'équation différentielle :

$$x\,(x^2 + 1)\,y' - 2y = 0$$

**3°** On se propose de déterminer une fonction g dérivable sur l'intervalle ]0 ; +∞ [ telle que la fonction :

$$h : \ x \to \frac{x^2}{x^2+1}\,g(x)$$

soit une solution particulière de l'équation (E).

**a)** Montrer que, pour qu'il en soit ainsi, on doit avoir :

$$g\,'(x) = (x-1)^2\,e^{-x}$$

**b)** Déterminer les réels $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ tels que la fonction $x \to (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,e^{-x}$ soit une primitive sur l'intervalle ]0 ; +∞ [ de la fonction $x \to (x-1)^2\,e^{-x}$ .

**c)** En déduire une solution particulière de l'équation (E) puis l'intégrale générale de cette équation.

**EXERCICE 3** (8 points)

Le problème comporte l'étude d'une courbe définie paramétriquement qui permettra le dessin d'une came.
Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

On désigne par $C_1$ la courbe ensemble des points M(x,y) du plan tels que , pour $0 \leq t \leq 1$ :

$$\begin{cases} x = 7 - 3t^2 \\ y = 6\sqrt{3}\,t - 2\sqrt{3}\,t^2 \end{cases}$$

**1°** Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle [0 ; 1] par :

$$f(t) = 7 - 3t^2 \qquad g(t) = 6\sqrt{3}\,t - 2\sqrt{3}\,t^2 .$$

Étudier les variations des fonctions f et g et rassembler les résultats dans un même tableau.

**2°** Reproduire et compléter le tableau suivant :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

| t | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(t) | | | | | | |
| g(t) | | | | | | |

On donnera, pour $t \neq 0$, des valeurs décimales arrondies à 0,1 près.

**3) a)** On note A le point de la courbe $C_1$ de paramètre $t = 0$.

Placer le point A ; déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente D en A à la courbe $C_1$.
Montrer, en le justifiant, que les droites (OA) et D sont perpendiculaires.

**b)** On note A' le point de la courbe $C_1$ de paramètre $t = 1$.

Placer le point A' ; déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente D' en A' à la courbe $C_1$.
Montrer, en le justifiant, que les droites (OA') et D' sont perpendiculaires.

**c)** Tracer la courbe $C_1$.

**d)** Montrer que, en radians, $(\overline{OA}, \overline{OA'}) = \frac{\pi}{3}$

**4°** Tracer la courbe $C_2$ symétrique de la courbe $C_1$ par rapport à l'axe des abscisses.

On note C la réunion des arcs de courbes $C_1$ et $C_2$.

**5°** On note $\Gamma$ l'image de la courbe C par la rotation de centre O d'angle $+\frac{2\pi}{3}$, puis $\Gamma'$ l'image de $\Gamma$ par cette même rotation.
La réunion des courbes C, $\Gamma$ , $\Gamma'$ représente le profil d'une came utilisée en mécanique.
Tracer ce profil.

**6°** Calculer l'intégrale :

$$I = 3\int_0^1 (f(t)\, g'(t) - g(t)\, f'(t))\, dt$$

qui représente l'aire en cm² de la came.
On donnera la valeur exacte puis la valeur décimale arrondie à 0,01 près.