Session 2012

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

« CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS »

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Coefficient : 2

Matériel et documents autorisés :

L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.
La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 7 pages, numérotées de 1 à 7.
L'annexe 1 page 6 et l'annexe 2 page 7 sont à rendre avec la copie.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 2 pages numérotées 1 et 2.

Exercice 1 : 9 points

Partie A.

Dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm, on considère les courbes de Bézier C_1 définie par les 3 points de définition P_0, P_1 et P_2 avec $P_0(0,0)$, $P_1(4,4)$ et $P_2(8,0)$ et C_2 définie par les 3 points de définition P_3, P_4 et P_5 avec $P_3(4,0)$, $P_4(8,4)$ et $P_5(12,0)$ **(voir annexe 1, page 6)**.

On rappelle que la courbe de Bézier C définie par 3 points de définition P_0, P_1 et P_2 est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM(t)} = \sum_{i=0}^{i=2} B_{i,2}(t)\overrightarrow{OP_i}$ $\quad t \in [0,1]$ où :

$$B_{0,2}(t) = (1-t)^2 \ , \ B_{1,2}(t) = 2t(1-t) \ , \ B_{2,2}(t) = t^2 .$$

1. Utiliser la méthode barycentrique pour construire avec soin, en laissant les traits de construction, le point $M_1\left(\frac{1}{3}\right)$, point de C_1 de paramètre $t = \frac{1}{3}$ sur le graphique fourni en **annexe 1, page 6, à rendre avec la copie.**

2. Démontrer que, pour $t \in [0,1]$, un système d'équations paramétriques de C_1 est :
$$\begin{cases} x_1(t) = 8t \\ y_1(t) = 8t - 8t^2 \end{cases}$$

3. Étudier les variations de x_1 et y_1 sur $[0,1]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.

4. a) À l'aide de votre calculatrice, compléter le tableau de valeurs situé en **annexe 1, page 6, à rendre avec la copie**.
b) Compléter le tracé de C_1 sur le graphique fourni en **annexe 1, page 6, à rendre avec la copie**.

Pour la suite de l'exercice, on admet que pour $t \in [0,1]$, un système d'équations paramétriques de C_2 est :
$$\begin{cases} x_2(t) = 4 + 8t \\ y_2(t) = 8t - 8t^2 \end{cases}$$

On note I le point d'intersection de C_1 et C_2, de coordonnées $\left(6, \frac{3}{2}\right)$.

5. a) Placer le point I sur le graphique. Déterminer par le calcul le paramètre correspondant à I sur C_1.
b) On considère maintenant C_2. Déterminer par le calcul le paramètre correspondant à I sur C_2.

Partie B.

On considère la courbe C_1 de la partie A dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 8t \\ y = 8t - 8t^2 \end{cases}$

pour t appartenant à $[0\,;1]$.

1. a) Montrer que : $y_1(t) = x_1(t) - \frac{1}{8}(x_1(t))^2$.

   b) L'arc C_1 est-il un arc de parabole ? Justifier.

2. On pose $f(x) = x - \frac{1}{8}x^2$.

   a) Soit $J = \int_6^8 f(x)dx$. Calculer la valeur exacte de J.

   b) Interpréter J à l'aide de l'aire d'une partie de plan à préciser.

   c) En déduire, en cm^2, l'aire du domaine hachuré sur l'**annexe 1** (on pourra utiliser la symétrie de C_1 et C_2 par rapport à la droite d'équation $x = 6$).

Exercice 2 : 3 points

Un mobile M a pour trajectoire, entre les instants $t = 0$ et $t = 1$, un arc C dont une représentation paramétrique dans un repère orthonormal est $\begin{cases} x(t) = 8t \\ y(t) = 8t - 8t^2 \end{cases}$.

On note $\overrightarrow{V(t)}$ le vecteur vitesse de M à l'instant t, c'est-à-dire le vecteur $\overrightarrow{V(t)}$ de coordonnées $(x'(t), y'(t))$ où x'et y' sont les fonctions dérivées de x et de y sur l'intervalle $[0,1]$.

1. a) Justifier que $\overrightarrow{V(t)}\begin{pmatrix} 8 \\ 8-16t \end{pmatrix}$.

   b) Montrer que $\left\|\overrightarrow{V(t)}\right\|^2 = 128\times(2t^2 - 2t + 1)$.

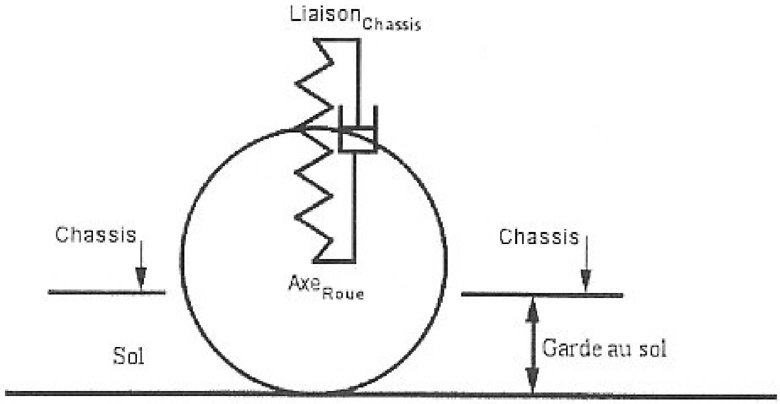
2. On considère la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(t) = 128\times(2t^2 - 2t + 1)$.
   Établir son tableau de variation.

3. Déterminer le minimum de f sur $[0\,;1]$ et la valeur de t correspondante.

4. En déduire à quel instant t la vitesse du mobile, c'est-à-dire $\left\|\overrightarrow{V(t)}\right\|$, est minimale et déterminer cette vitesse minimale.

Exercice 3: 8 points

La suspension d'une automobile est assurée par des systèmes indépendants formés chacun d'un ressort hélicoïdal et d'un amortisseur à piston à huile montés entre l'arbre de roue et le châssis.



Lors d'un essai dynamique à vide, le châssis est abaissé puis libéré sans vitesse initiale.

Partie A.

Sous les conditions initiales de l'essai, la hauteur du châssis par rapport au sol, appelée garde au sol, est modélisée par une fonction f de la variable réelle t, définie sur $[0\,;+\infty[$ dont la courbe représentative C_f est donnée en **annexe 2, page 7**. La distance du châssis au sol est donnée en millimètres, le temps en secondes.

1. À l'aide du graphique, déterminer les conditions initiales $f(0)$ et $f'(0)$.

2. On admet que la fonction f, définie sur $[0\,;+\infty[$ s'exprime par:

$$f(t)=\left(-150\cos(16t)-112{,}5\sin(16t)\right)e^{-12t}+250$$

a) Montrer que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $t\mapsto e^{-12t}$ est : $e^{-12t}=1-12t+72t^2+t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$

b) On admet les développements limités d'ordre 2, au voisinage de 0, suivants :

$\sin(16t)=16t+t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$

$\cos(16t)=1-128t^2+t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$

Montrer que le développement limité, d'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$f(t)=100+30000t^2+t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$

c) En déduire une équation de la tangente à la courbe représentative C_f au point d'abscisse 0.

d) Retrouver les conditions initiales de la question 1.

Partie B

Pour le confort des passagers, on souhaite choisir un amortisseur permettant un retour à la position d'équilibre le plus bref possible sans oscillation.

On sélectionne un amortisseur dont la distance $y(t)$ du châssis par rapport au sol exprimée en millimètres, vérifie l'équation différentielle : (F) : $y'' + 40y' + 400y = 100000$
où y est une fonction de la variable t, définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, y' sa fonction dérivée, y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Donner les solutions de l'équation différentielle sans second membre
(F_0) : $y'' + 40y' + 400y = 0$.

2. Montrer que la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = 250$ est une solution de (F).

3. En déduire l'ensemble des solutions de (F).

4. Déterminer la solution h de F vérifiant les conditions initiales $h(0) = 100$ et $h'(0) = 0$.

5. On considère la fonction h définie sur $[0 ; +\infty[$ par $h(t) = (-3000t - 150)e^{-20t} + 250$.

a) Démontrer que pour tout réel de $[0 ; +\infty[$, $h'(t) = 60000te^{-20t}$.

b) Étudier les variations de h.

6. a) Compléter le tableau de valeurs sur **l'annexe 2, page 7, à rendre avec la copie** (les valeurs seront arrondies au dixième).

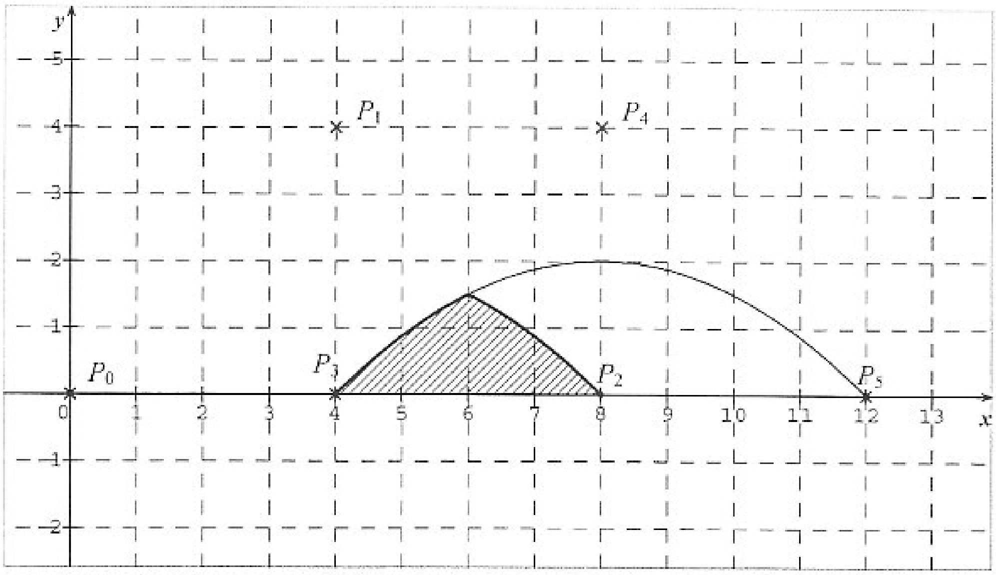
b) Construire la courbe représentative Γ de h sur le même graphique que C_f sur **l'annexe 2, page 7, à rendre avec la copie**. L'objectif est-il atteint ?

Annexe 1 à rendre avec la copie

Exercice 1 : Partie A Question 4. a)

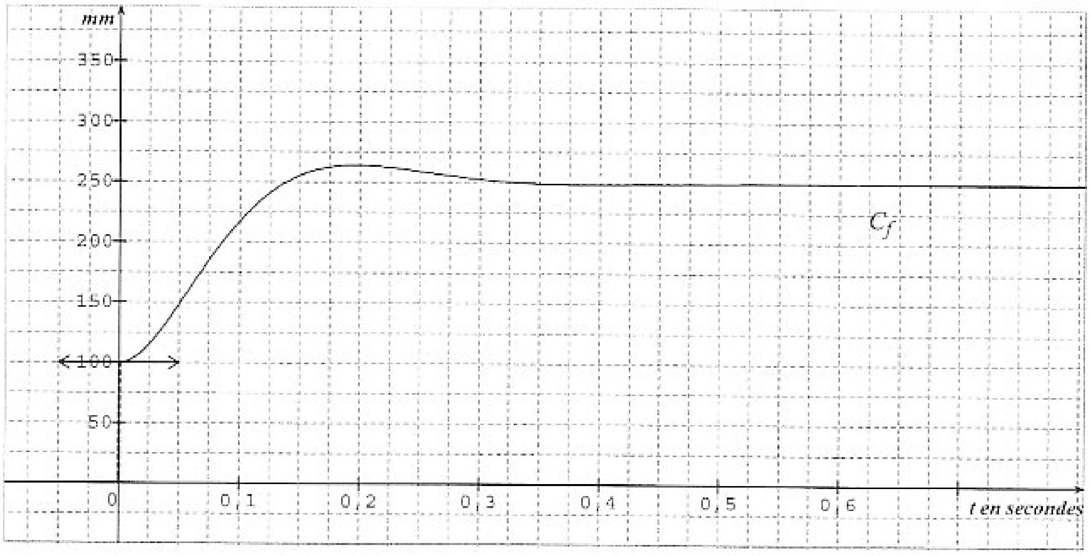
t	0	0,2	0,4	0,6	0,75	0,8	0,9	1
$x_1(t)$								
$y_1(t)$								

Figure à compléter (Partie A Questions 1. et 4 .b)



Annexe 2 à rendre avec la copie

Exercice 3 : Partie A : représentation graphique de la fonction f



Partie B
Question 6. a)

t	0,05	0,1	0,15	0,20	0,3	0,35	0,4	0,45
$h(t)$								

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES
BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\text{Arc}\sin t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\text{Arc}\tan t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$e^{at} \quad (a \in \mathbb{C})$	ae^{at}
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n\varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ …….. où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ ……… où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.