

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS

SESSION 2011

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Coefficient : 2

**La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction
interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.**

**L'usage des instruments de calcul et du formulaire
de mathématiques est autorisé.**

Une feuille de papier millimétré est fournie.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comprend 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 2 pages numérotées 1 et 2.

EXERCICE 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions, une seule réponse A, B, C est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

On ne demande aucune justification.

Notation :

Chaque réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1° $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal direct de l'espace. On considère les

vecteurs : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est :	-1	5	$\vec{v}$

2° Avec les mêmes données qu'au 1°,

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
La norme du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est :	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	4

3° On donne les matrices M et N : $M = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -6 \\ 6 & -3 & -6 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
$M - 2N$ est égale à :	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4° Avec les mêmes données qu'au 3°,

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Le produit $M \times M = M^2$ est :	$\begin{pmatrix} 377 & 356 & 170 \\ 356 & 337 & 160 \\ 170 & 160 & 77 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 169 & 64 & 144 \\ 144 & 49 & 144 \\ 36 & 16 & 25 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2 (6 points)

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 1 - \sin x$, où y est une fonction de la variable réelle x , définie et deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$, y' sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

1° Déterminer les solutions définies sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

2° Déterminer la constante réelle k telle que la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = k \cos x + 1$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).

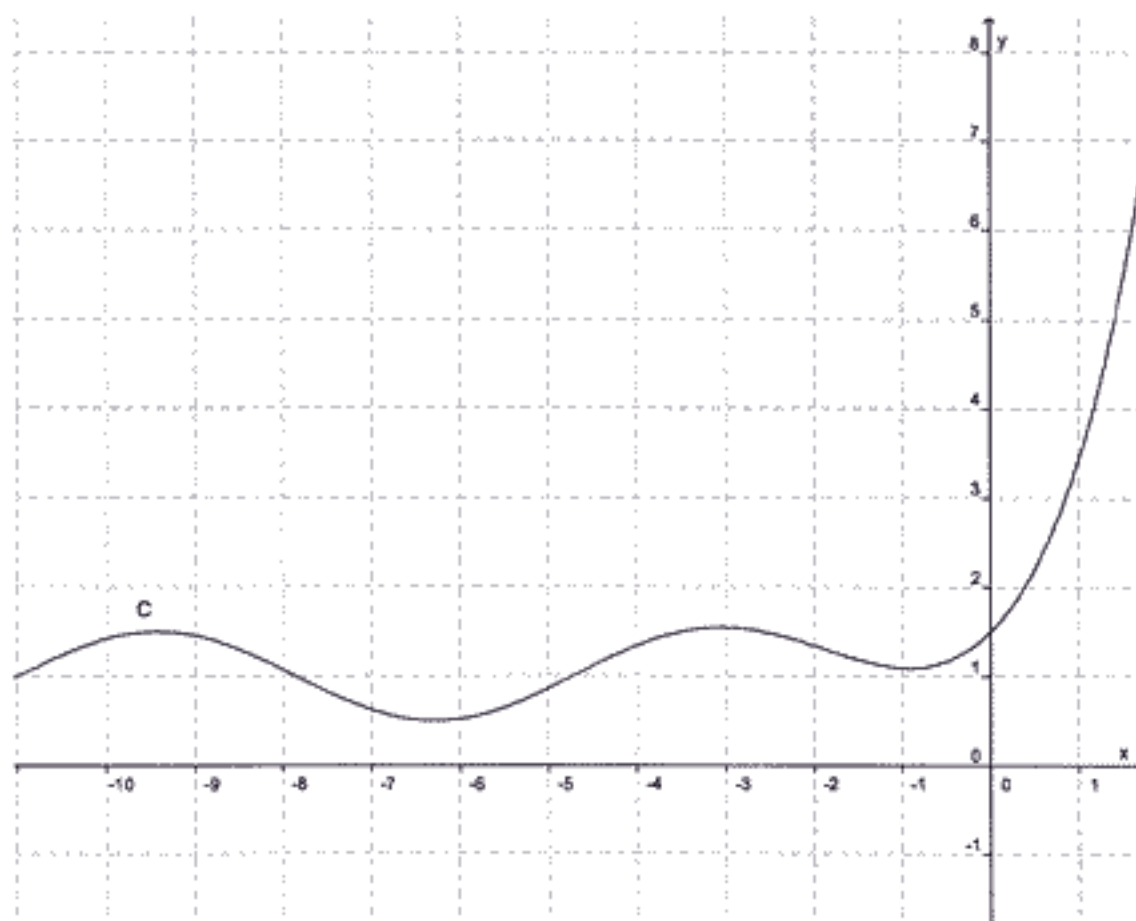
3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = \frac{3}{2}$ et $f'(0) = 1$.

B. Étude locale d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 1 + e^x - \frac{1}{2} \cos x$.

On a tracé ci-dessous sa courbe représentative C dans un repère orthonormal ($O ; \vec{i}, \vec{j}$).



BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS		SESSION 2011
CPMAT	DUREE : 3 h	Coefficient : 2
MATHEMATIQUES		Page 3/7

1° a) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \mapsto -\frac{1}{2} \cos x$

b) En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est $f(x) = \frac{3}{2} + x + \frac{3}{4} x^2 + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

2° a) Déduire de la question précédente une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

b) Étudier les positions relatives de C et T au voisinage du point d'abscisse 0.

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS		SESSION 2011
CPMAT	DUREE : 3 h	Coefficient : 2
MATHEMATIQUES		Page 4/7

EXERCICE 3 (10 points)

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.

On considère les nombres réels $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$ et $t_4 = 4$. On se propose de construire une courbe B-spline de degré 2 de vecteur nœud $(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4)$.

A. Détermination des fonctions polynômes B-splines

On rappelle que les fonctions polynômes B-splines de degré m associées au vecteur nœud $(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4)$ sont définies sur $\mathbf{R}$ et pour $m \neq 0$, par :

$$N_{i,m}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+m} - t_i} N_{i,m-1}(t) + \frac{t_{i+m+1} - t}{t_{i+m+1} - t_{i+1}} N_{i+1,m-1}(t).$$

1° On a déterminé des fonctions polynômes B-splines de degré 0 et 1 associées au vecteur nœud $(0, 1, 2, 3, 4)$ qui ont été rassemblées dans les tableaux ci-dessous.

t	0	1	2	3	4
$N_{0,0}(t)$	0	1	0	0	0
$N_{1,0}(t)$	0	0	1	0	0
$N_{2,0}(t)$	0	0	0	1	0
$N_{3,0}(t)$	0	0	0	0	1

t	0	1	2	3	4
$N_{0,1}(t)$	0	t	$2-t$	0	0
$N_{1,1}(t)$	0	0		$3-t$	0
$N_{2,1}(t)$	0	0	0	$t-2$	$4-t$

Déterminer $N_{1,1}(t)$ pour tout t de l'intervalle $[1, 2]$.

2° Le tableau suivant donne les fonctions polynômes B-splines de degré 2 associées au vecteur nœud $(0, 1, 2, 3, 4)$:

t	0	1	2	3	4
$N_{0,2}(t)$	0	$\frac{1}{2} t^2$	$-t^2 + 3t - \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2} t^2 - 3t + \frac{9}{2}$	0
$N_{1,2}(t)$	0	0	$\frac{1}{2} t^2 - t + \frac{1}{2}$		$\frac{1}{2} t^2 - 4t + 8$

Démontrer que, pour tout t de l'intervalle $[2, 3]$, $N_{1,2}(t) = -t^2 + 5t - \frac{11}{2}$.

B. Détermination des équations paramétriques d'un des arcs de la courbe B-spline

Dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 8 centimètres, on considère les points $P_0(0, 1)$ et $P_1(2, 1)$.

La courbe B-spline associée aux points P_0 et P_1 , au vecteur nœud $(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4)$ et aux polynômes B-splines de degré 2 est définie par $\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^{i=1} N_{i,2}(t) \overrightarrow{OP_i}$.

Démontrer que, pour tout t de l'intervalle $[1, 2]$, le point $M(t)$ a pour coordonnées $x(t) = t^2 - 2t + 1$ et $y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1$.

Dans ce qui suit, **on admet** que, pour tout t de l'intervalle $[2, 3]$, le point $M(t)$ a pour coordonnées $x(t) = -2t^2 + 10t - 11$ et $y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1$.

C. Construction de la courbe B-spline

On considère l'arc C_1 , ensemble des points $M(t)$ de coordonnées

$$\begin{cases} x(t) = f_1(t) = t^2 - 2t + 1 \\ y(t) = g_1(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1 \end{cases} \text{ où } t \text{ appartient à l'intervalle } [1, 2].$$

1° a) Étudier les variations des fonctions f_1 et g_1 sur $[1, 2]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.

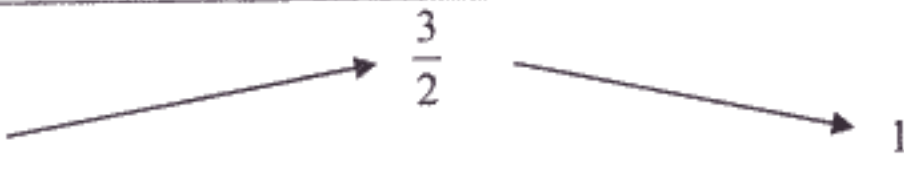
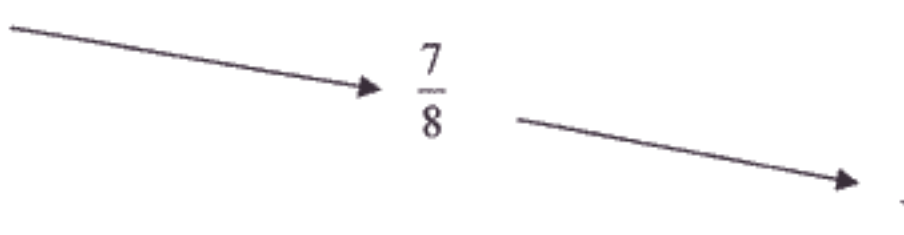
b) Préciser des vecteurs directeurs des tangentes à C_1 aux points $M(t)$ de paramètres 1 et 2.

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS		SESSION 2011
CPMAT	DUREE : 3 h	Coefficient : 2
MATHEMATIQUES		Page 6/7

2° On considère l'arc C_2 , ensemble des points $M(t)$ de coordonnées

$$\begin{cases} x(t) = f_2(t) = -2t^2 + 10t - 11 \\ y(t) = g_2(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1 \end{cases} \text{ où } t \text{ appartient à l'intervalle } [2, 3].$$

On admet que le tableau des variations conjointes des fonctions f_2 et g_2 sur $[2;3]$ est le suivant :

t	2	$\frac{5}{2}$	3		
$f'_2(t)$	2	+	0	-	-2
$f_2(t)$	1			$\frac{3}{2}$	1
$g'_2(t)$	0	-		-1	
$g_2(t)$	1			$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{2}$

Déterminer (par lecture du tableau ou par calcul) des vecteurs directeurs des tangentes à C_2 aux points $M(t)$ de paramètres 2, $\frac{5}{2}$ et 3.

3° On rappelle que le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité graphique est 8 centimètres.

a) Construire les tangentes à la courbe C_1 aux points $M(1)$ et $M(2)$.

b) Construire les tangentes à la courbe C_2 aux points $M(2)$, $M\left(\frac{5}{2}\right)$ et $M(3)$.

c) On désigne par A le point de coordonnées $A(0, \frac{1}{2})$.

On admet que pour t appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, l'arc C_0 de la courbe B-spline cherchée est le segment $[OA]$.

Construire sur le même graphique les arcs de courbe C_0, C_1, C_2 .

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$$

$$a^t = e^{t \ln a}, \text{ où } a > 0$$

$$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}, \text{ où } t > 0$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$$

$$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$$

$$\sin t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it})$$

$$e^{at} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)), \text{ où } a = \alpha + i\beta$$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 ;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0$$

Croissances comparées à l'infini

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0 ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \ln t = 0$$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\text{Arc sin } t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\text{Arc tan } t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$e^{at} \ (a \in \mathbb{C})$	ae^{at}
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = k u'$$

$$(uv)' = u'v + u v'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u v'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u) u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \text{ } u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + t^n \varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Equations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.