BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

"CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS"

SESSION 2010

***

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures **Coefficient : 2**

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.   **L'usage des instruments de calcul et du formulaire de mathématiques est autorisé.**

Une feuille de papier millimétré est fournie.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comprend 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 2 pages numérotées de 1 et 2.

EXERCICE 1 (10 points)

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \ 2y'' + 2y' + y = (5x^2 + 22x + 31)\,\mathrm{e}^x$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur **R**, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1° Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $2y'' + 2y' + y = 0$.

2° Montrer que la fonction g définie sur **R** par $g(x) = (x^2 + 2x + 3)\,\mathrm{e}^x$ est une solution particulière de l'équation (E).

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 3$ et $f'(0) = 5$.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = (x^2 + 2x + 3)\,\mathrm{e}^x$.
On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1° Démontrer que, pour tout x de **R**,

$$f'(x) = (x^2 + 4x + 5)\,\mathrm{e}^x .$$

2° Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans **R**.

3° a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

4° Établir le tableau de variation de f sur **R**.

5° a) Démontrer que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

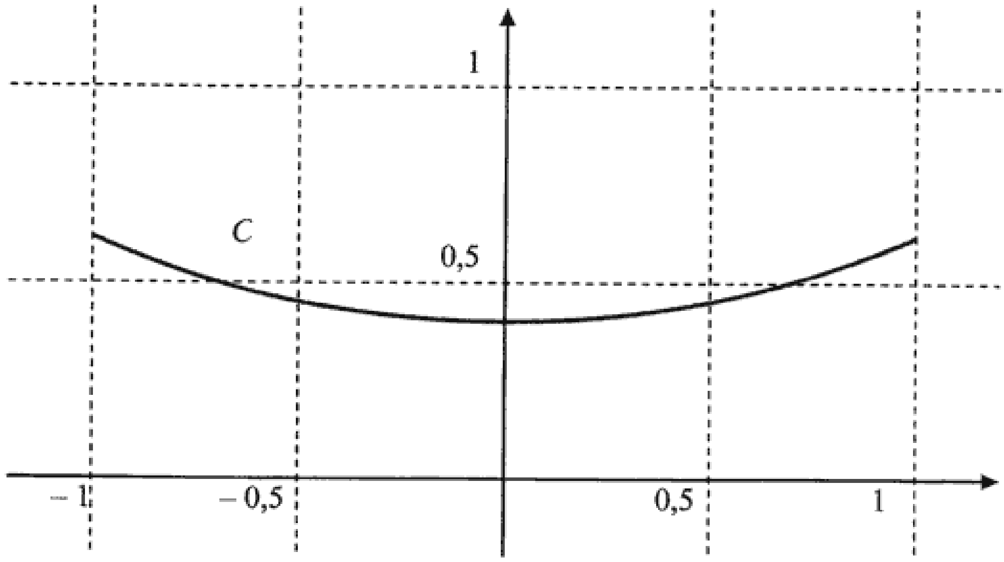
$f(x) = 3 + 5x + \frac{9}{2}x^2 + x^2\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

b) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

c) Étudier la position relative de C et T au voisinage du point d'abscisse 0.

EXERCICE 2 (3 points)

La courbe C ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthogonal, de la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \frac{1}{5}(e^{x} + e^{-x})$.



On considère le solide de révolution engendré par la rotation de la courbe C autour de l'axe des abscisses.
On désigne par V le volume, en unités de volume, de ce solide.
On admet que $V = \int_{-1}^{1} \pi [f(x)]^2 \, dx$.

1° Vérifier que : $V = \int_{-1}^{1} \frac{\pi}{25}(2 + e^{2x} + e^{-2x}) \, dx$.

2° Démontrer que : $V = \frac{\pi}{25}(4 + e^{2} - e^{-2})$.

3° Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de V.

Le solide obtenu ci-dessus est le modèle d'un élément de mobilier urbain.

EXERCICE 3 (7 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$ où l'unité graphique est 4 centimètres.

On souhaite construire la courbe de Bézier C définie par les points de définition suivants donnés par leurs coordonnées :

$A_0(0, 0)$; $A_1(0, 2)$; $A_2(3, \frac{3}{4})$.

On rappelle que la courbe de Bézier définie par les points de définition A_i $(0 \leq i \leq n)$ est l'ensemble des points $M(t)$ tels que, pour tout t de l'intervalle $[0, 1]$:

$$\overrightarrow{OM}\ (t) = \sum_{0}^{n} B_{i,n}(t)\ \overrightarrow{OA_i} \quad \text{où} \quad B_{i,n}(t) = C_n^i\ t^i\ (1-t)^{n-i}.$$

1° Développer, réduire et ordonner les polynômes $B_{i,2}(t)$ avec $0 \leq i \leq 2$.

2° On note $(f(t), g(t))$ les coordonnées du point $M(t)$ de la courbe C.

Démontrer qu'un système d'équations paramétriques de la courbe C est :

$$\begin{cases} x = f(t) = 3t^2 \\ y = g(t) = 4t - \dfrac{13}{4}t^2 \end{cases} \text{ où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0, 1].$$

3° Étudier les variations de f et g sur $[0, 1]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.

4° Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe C :

a) au point A_0 ,

b) au point A_2 ,

c) au point $M(\frac{8}{13})$.

5° La figure est à réaliser sur une feuille de papier millimétré.

Construire les tangentes définies au 4° et la courbe C. Que constate-t-on ?

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES
BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$	$\operatorname{Arc}\sin t$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\operatorname{Arc}\tan t$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
t^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	e^{at} $(a \in \mathbb{C})$	$a e^{at}$
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(k\,u)' = k\,u'$$

$$(uv)' = u'v + u\,v'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)\,u'$$

$$\left(e^u\right)' = e^u\,u'$$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$$\left(u^\alpha\right)' = \alpha\, u^{\alpha-1}\, u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n\varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + t^n\varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + t^n\varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p\frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p\frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n\varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$	$f(t) = k e^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ .... où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique
équation caractéristique :	Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ .... où r est la racine double de l'équation caractéristique
$ar^2 + br + c = 0$	Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines
de discriminant Δ	complexes conjuguées de l'équation caractéristique.