

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

"CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS"

SESSION 2009

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Coefficient : 2

**La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction
interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.**

**L'usage des instruments de calcul et du formulaire
de mathématiques est autorisé.**

Deux feuilles de papier millimétré sont fournies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 6 pages, numérotées de 1/6 à 6/6.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 2 pages numérotées 1 et 2.

EXERCICE 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions, une seule réponse A, B, C est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

On ne demande aucune justification.

Notation :

Chaque réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1° Soient M et N les matrices définies par $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
La somme $M + N$ est :	$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

2° Avec les mêmes données qu'au 1° :

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Le produit $M \times N$ est :	$\begin{pmatrix} 7 & -7 & 0 \\ 7 & -3 & 9 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 5 \\ -7 & -3 & -3 \\ 0 & 9 & -2 \end{pmatrix}$

3° $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal de sens direct de l'espace. On considère les

vecteurs : $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont :	orthogonaux	colinéaires	ni orthogonaux ni colinéaires

4° Avec les mêmes données qu'au 3°,

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est :	$\vec{w} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\vec{0}$	$\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2 (8 points)

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + xy = x$.

où y est une fonction de la variable réelle x , définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels et y' sa fonction dérivée.

1° Déterminer les solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$y' + xy = 0.$$

2° Démontrer que la fonction constante g , définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = 1$, est une solution particulière de l'équation (E).

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 2$.

B. Étude d'une fonction et réalisation d'une figure

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 1 + e^{-\frac{x^2}{2}}$.

On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 4 centimètres.

1° a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b) Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

2° a) Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = -x e^{-\frac{x^2}{2}}$.

b) Donner le tableau de variation de f sur $\mathbf{R}$.

3° a) Tracer sur une feuille de papier millimétré la courbe C dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ défini au début de la partie B.

b) Tracer dans le même repère que la courbe C la courbe P d'équation $y = 2 - \frac{x^2}{2}$.

On ne demande pas d'étudier les variations de la fonction définie par $x \mapsto 2 - \frac{x^2}{2}$.

On constate que les courbes C et P sont proches l'une de l'autre sur l'intervalle $[-0,5; 0,5]$.

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS		SESSION 2009
CPMAT	DUREE : 3 h	Coefficient : 2
MATHÉMATIQUES		Page 3/6

C. Détermination d'une valeur approchée d'une intégrale

Dans cette partie, on se propose de déterminer une valeur approchée de l'intégrale

$$I = \int_{-0,5}^{0,5} f(x) \, dx.$$

1° a) En utilisant le développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle, déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction

$$\text{définie par } x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

b) En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est : $f(x) = 2 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

2° a) On note $J = \int_{-0,5}^{0,5} (2 - \frac{x^2}{2}) \, dx$.

Démontrer que $J = \frac{47}{24}$. Donner la valeur approchée de J arrondie à 10^{-3} .

b) Un logiciel donne $I \approx 1,960$. Vérifier que cette valeur approchée de I et la valeur approchée de J obtenue à la question a) diffèrent de 2×10^{-3} .

EXERCICE 3 (8 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité graphique est 2 centimètres. On se propose de construire la courbe B-spline obtenue à partir de quatre points de définition P_1, P_2, P_3 et P_4 et de trois polynômes de Riesenfeld du second degré.

Les quatre points sont donnés par leurs coordonnées dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

$$P_1(0, 3), P_2(1, -2), P_3(4, 3) \text{ et } P_4(-2, 5).$$

La courbe B-spline cherchée est la réunion de deux arcs de courbe C_1 et C_2 .

A. Détermination d'une représentation paramétrique de l'arc de courbe C_1

1° On rappelle que les polynômes de Riesenfeld R_i de degré 2, pour i prenant les valeurs 0, 1 ou 2, sont définis pour tout t appartenant à $[0, 1]$ par :

$$R_i(t) = 3 \sum_{j=0}^{2-i} (-1)^j \frac{(t+2-i-j)^2}{j!(3-j)!}.$$

Démontrer que, pour tout t de $[0, 1]$, $R_0(t) = \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}$.

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS		SESSION 2009
CPMAT	DUREE : 3 h	Coefficient : 2
MATHÉMATIQUES		Page 4/6

2° L'arc de courbe C_1 est l'ensemble des points $M_1(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM_1(t)} = R_0(t) \overrightarrow{OP_1} + R_1(t) \overrightarrow{OP_2} + R_2(t) \overrightarrow{OP_3}.$$

On admet que pour tout t de $[0, 1]$: $R_1(t) = -t^2 + t + \frac{1}{2}$ et $R_2(t) = \frac{1}{2} t^2$.

Démontrer que l'arc de courbe C_1 est défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = f_1(t) = t^2 + t + \frac{1}{2} \\ y = g_1(t) = 5t^2 - 5t + \frac{1}{2} \end{cases} \text{ où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0, 1].$$

B. Étude de variations et construction de la courbe B-spline

1° a) Étudier les variations des fonctions f_1 et g_1 sur $[0, 1]$, où f_1 et g_1 sont les fonctions définies à la question 2° de la partie A. Rassembler les résultats dans un tableau unique.

b) Donner un vecteur directeur de chacune des tangentes à l'arc de courbe C_1 aux points $M_1(0)$, $M_1(\frac{1}{2})$, $M_1(1)$.

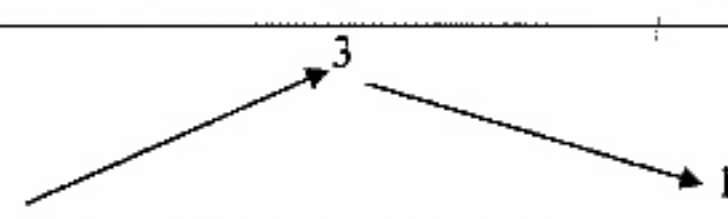
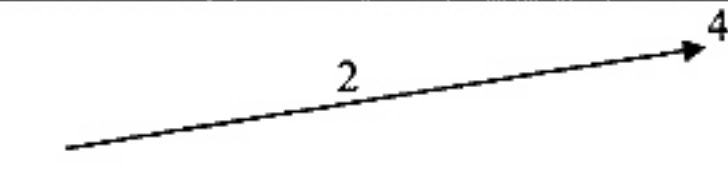
2° L'arc de courbe C_2 est l'ensemble des points $M_2(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM_2(t)} = R_0(t) \overrightarrow{OP_2} + R_1(t) \overrightarrow{OP_3} + R_2(t) \overrightarrow{OP_4}.$$

On admet que l'arc de courbe C_2 est défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = f_2(t) = -\frac{9}{2}t^2 + 3t + \frac{5}{2} \\ y = g_2(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 5t + \frac{1}{2} \end{cases} \text{ où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0, 1].$$

Le tableau des variations conjointes des fonctions f_2 et g_2 est le suivant :

t	0	$\frac{1}{3}$	1		
$f_2'(t)$	3	+	0	-	-6
$f_2(t)$	$\frac{5}{2}$				
$g_2'(t)$	5	+			2
$g_2(t)$	$\frac{1}{2}$				

Donner un vecteur directeur de chacune des tangentes à l'arc de courbe C_2 aux points $M_2(0)$, $M_2(\frac{1}{3})$, $M_2(1)$.

3° On rappelle que le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité graphique est 2 centimètres.

a) Construire sur une feuille de papier millimétré, les tangentes à l'arc de courbe C_1 aux points $M_1(0)$, $M_1(\frac{1}{2})$ et $M_1(1)$, puis l'arc de courbe C_1 .

b) Construire, sur le même graphique, les tangentes à l'arc de courbe C_2 aux points $M_2(0)$, $M_2(\frac{1}{3})$, $M_2(1)$, puis l'arc de courbe C_2 .

c) Placer les points de définition sur la figure.

4° a) Donner les coordonnées du point I où se raccordent les arcs de courbe C_1 et C_2 .

b) Montrer que la tangente commune à l'arc C_1 et à l'arc C_2 au point I est la droite (P_2P_3) .

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS		SESSION 2009
CPMAT	DUREE : 3 h	Coefficient : 2
MATHEMATIQUES		Page 6/6

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$$

$$a^t = e^{t \ln a}, \text{ où } a > 0$$

$$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}, \text{ où } t > 0$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$$

$$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$$

$$\sin t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it})$$

$$e^{at} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)), \text{ où } a = \alpha + i\beta$$

2. CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 ;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0$$

Croissances comparées à l'infini

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0 ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \ln t = 0.$$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\text{Arc sin } t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\text{Arc tan } t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$e^{at} \ (a \in \mathbb{C})$	ae^{at}
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = k u'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \text{ } u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} t^n + t^n \varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Equations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique
équation caractéristique :	Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique
$ar^2 + br + c = 0$	Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.
de discriminant Δ	